الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

2019-2020

# الرياضيات

## نسخة الإمارات العربية المتحدة

الصف
10
عام

McGraw Hill

McGraw-Hill Education

# الرياضيات

## المسار العام

## نسخة الإمارات العربية المتحدة

1

10

3 2019-2020 2

Mc
Graw
Hill

**Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 10 Integrated Math Vol 2**

FM. Front Matter, from Integrated Math II © 2012
5. Set Theory, from Math in Our World Chapter 2 © 2019
6. Circles, from Integrated Math II Chapter 11 © 2012
7. Proportions and Similarity, from Integrated Math II Chapter 9 © 2012
EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math II © 2012

صورة الغلاف: **hunthomas/Shutterstock.com**

mheducation.com/prek-12



طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

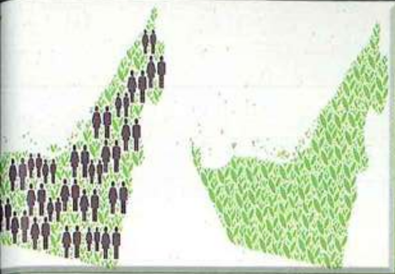
رقم النشر الدولي: 5-689983-52-1-978 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-689983-3 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 9-689985-52-1-978 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-689985-X (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 4-689993-52-1-978 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-689993-0 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 8-689995-52-1-978 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-689995-7 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

# ملخص المحتويات



# الوحدة 5 نظرية المجموعات

# الوحدة 6 الدوائر

الوحدة 7

# التناسب والتشابه

# كتيب الطالب

## الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الوحدة 5

# نظرية المجموعات

## لمحة عامة

الدرس 5-1

# مقدمة في نظرية المجموعات

## أهداف التعلم

1 تعريف المجموعة.

2 كتابة المجموعات بثلاث طرق مختلفة.

3 تعريف المجموعة الخالية.

4 إيجاد عدد العناصر الرئيسة في المجموعة.

5 تصنيف المجموعات إلى منتهية وغير منتهية.

6 تحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتَين أم متكافئتَين.

تحدد القوانين التي تقرر من يمكنه التصويت في انتخابات معينة مجموعة محددة جيدًا من الأشخاص. فإذا لم تكن المجموعة محددة جيدًا، فسيكون تطبيق القانون مستحيلًا تقريبًا.

هل فكرت من قبل في الدور الذي يقوم به تجميع الأشياء في حياتنا اليومية؟ فكّر في كافة المجموعات الجزئية التي بين الأشخاص الذين تعرفهم فقط؛ لديك مجموعة الأصدقاء المقربين، مجموعة أصدقاء التواصل الاجتماعي، مجموعة أفراد العائلة، مجموعة المعارف العابرين، مجموعة زملاء الدراسة، مجموعة الأساتذة، مجموعة زملاء العمل. . . كما أن لديك مجموعة المفاتيح، ومجموعة الملابس، والأجهزة الإلكترونية، والأطعمة، والبرامج التلفزيونية، وغيرها الكثير. فعالمنا بالكامل مقسم إلى مجموعات من الأشياء أو ما نسميه *المجموعات*. ومن ثم فإن دراسة المجموعات من منظور رياضي يُعد فرصة جيدة لدراسة كيفية استخدام الرياضيات في عالمنا. سيتم تنظيم دراستنا للمجموعات بالكامل بحسب الموضوعات التي في هذا القسم. تنظيم - هل فهمت ما أقصد؟ لن تجد هذا النوع من الدعابة الرديئة في معظم الكتب الدراسية.

## المفاهيم الأساسية

لنبدأ بالتعريف الأساسي للمجموعات.

**المجموعة** عبارة عن تجميع للأشياء.

في دراستنا للمجموعات، سنرغب في تقييد انتباهنا بالمجموعات المحددة جيدًا. وتكون المجموعة **محددة جيدًا** إذا استطعنا -فيما يتعلق بأي عنصر محدد- تحديد ما إذا كان ضمن المجموعة أم لا بشكل موضوعي. على سبيل المثال، تُعد مجموعة "الحروف الأبجدية للغة العربية" محددة جيدًا لأنها تتكون من 28 حرفًا نستخدمها، دون غيرها من العناصر، لتكوين الحروف الأبجدية. أما مجموعة "الأشخاص الطوال القامة" في صفك، فليست محددة جيدًا لأن تحديد من ينتمي إلى هذه المجموعة تحديدًا دقيقًا موضع تأويل. وهكذا، لكي تكون المجموعة محددة جيدًا، يجب أن يستند تحديد ما تحتوي عليه وما لا تحتوي عليه إلى حقائق وليس إلى وجهات نظر.

1. تعريف المجموعة.

يسمى كل شيء في المجموعة **عنصرًا** أو عضوًا في المجموعة. يُطلق على إحدى طرق تصميم المجموعة **طريقة ذكر العناصر أو ذكر عناصرها**. وفيها تُدرج العناصر بين قوسين، مع الفصل بينها باستخدام الفواصل. ولا يُعد ترتيب العناصر مهمًّا؛ فالمجموعتان {2, 5, 7} و{7, 2, 5} هما نفسهما. ونسمّي المجموعات غالبًا باستخدام حرف كبير من أحرف الانجليزية.

### مثال 1 كتابة المجموعة باستخدام ذكر العناصر

اكتب مجموعة شهور السنة التي تبدأ بحرف M في اللغة الإنجليزية. هل هذه المجموعة محددة جيدًا؟ لِمَ أو لِمَ لا؟

**الحل**

الشهران اللذان يبدءان بالحرف M هما March وMay. ويمكن كتابة الإجابة باستخدام رمز المجموعة كما يلي

$$M = \{\text{March, May}\}$$

وهذه مجموعة محددة جيدًا لأن كلًا من اسماء الشهور إما أن يبدأ بحرف M أو لا؛ فلا تحتمل التأويل.

**ملاحظة رياضية**

توضّح الفواصل التي بين العناصر أن عناصر المجموعة هي الأسماء، وليست الحروف الفردية.

## جرّب هذا 1

اكتب مجموعة اسماء الشهور التي تنتهي بحرف $y$ في اللغة الإنجليزية.

في الرياضيات، يجرى تحديد مجموعة *أعداد العد* أو **الأعداد الطبيعية** كما يلي $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. (عندما نصمم المجموعات، فإن النقاط الثلاث، أو *علامة القطع*، تعني أن قائمة العناصر تستمر بشكل لا نهائي بالنمط نفسه). المجموعة $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ هي مجموعة **الأعداد الطبيعية الزوجية** والمجموعة $O = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ هي مجموعة **الأعداد الطبيعة الفردية.**

### مثال 2 كتابة المجموعات بذكر العناصر

استخدم طريقة ذكر العناصر للقيام بما يلي:

(a) كتابة مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقل عن 6.
(b) كتابة مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تزيد عن 4.
(c) هل يمكنك التفكير في طريقة أخرى لوصف كل مجموعة لفظيًا؟

**الحل**

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
(b) $\{5, 7, 9, 11, \ldots\}$

(c) يمكن وصف المجموعة الأولى بمجموعة الأعداد الطبيعية التي تقل عن أو تساوي 5، أو المحصورة بين 0 و6.

ويمكن وصف المجموعة الثانية بمجموعة الأعداد الفردية التي تزيد عن 3، أو التي تزيد عن أو تساوي 5.

**ملاحظة رياضية**

يمكنك إدراج عنصر المجموعة أكثر من مرة إذا كان يعني الكثير بالنسبة إليك، لكن لا يوجد سبب جيد تحديدًا لذكر التكرار. على سبيل المثال، مجموعة حروف كلمة *تكرار* تُكتب هكذا {ت، ك، ر، ا}.

## جرّب هذا 2

اكتب كل مجموعة، باستخدام طريقة ذكر العناصر، ثم اكتب وصفًا بديلًا واحدًا على الأقل لكل مجموعة.

(a) مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية من 80 إلى 90.
(b) مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تزيد عن 10.

## تنبيه

يتساءل الطلاب غالبًا عن عدد عناصر المجموعة التي يكتبونها قبل الإنهاء بعلامة القطع. الإجابة الصحيحة هي "سبعة". مجرد مزاح — لا توجد قاعدة محددة. تأكد فقط من تضمين أعداد كافية توضح النمط. فبالنسبة إلى (2(b على سبيل المثال، سيترك الاكتفاء بكتابة $\{5, 7, \ldots\}$ أي عدد من التفسيرات المحتملة: $\{5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, \ldots\}$. أما $\{5, 7, 10, 14, \ldots\}$ فهما الزوجان اللذان سيتبادران إلى الذهن.

يُستخدم الرمز $\in$ - ينتمي- لتوضيح أن شيئًا ما عنصرًا في المجموعة. على سبيل المثال، إذا كانت $A$ هي مجموعة الأعداد الأولية، فيمكننا كتابة $7 \in A$، وتُقرأ " 7 أحد عناصر المجموعة $A$ أو7 ينتمي الى $A$." وبالمثل، يمكننا كتابة $11 \in A$.

وعندما لا يكون الشيء عنصرًا في المجموعة، فإننا نستخدم الرمز $\notin$- لا ينتمي-. حيث إن "9" ليس عددا أوليًا، يمكننا كتابة $9 \notin A$، وتُقرأ " 9 ليس عنصرًا في المجموعة $A$ أو 9 لا ينتمي الى $A$."

**ملاحظة رياضية**

يستخدم البعض الرمز $\ni$ عند القراءة من اليمين إلى اليسار.

### مثال 3 فهم رمز المجموعات

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) الجزائر تنتمي إلى $A$، حيث $A$ هي مجموعة الدول الواقعة غرب نهر النيل.
(b) $27 \in \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$
(c) $z \notin \{v, w, x, y, z\}$

**الحل**

(a) تقع الجزائر غرب النيل، لذا فإن الجزائر عنصر في المجموعة $A$. العبارة صائبة.
(b) يوضح النمط أن كل عنصر يزيد بمقدار 4 عن العنصر السابق. ومن ثم تكون العناصر الثلاثة التالية 21 و25 و29؛ تم تجاوز 27، ومن ثم فإن 27 لا ينتمي إلى المجموعة. العبارة خاطئة.
(c) الحرف $z$ ينتمي إلى المجموعة، ومن ثم تكون هذه العبارة خاطئة.

**ملاحظة رياضية**

يمكن أن يكون رمز المجموعة مربكًا إلى حد ما، ويجب أن تكون حريصًا على كتابة ما تقصد. على سبيل المثال، من الخطأ كتابة $\{6\} \in \{2,4,6\}$. حيث يمثل الرمز $\{6\}$ مجموعة تحتوي على 6، وهي ليست عنصرًا في $\{2,4,6\}$. ولكن ينبغي كتابة $6 \in \{2,4,6\}$.

## جرّب هذا 3

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) يوليو ينتمي إلى $A$، حيث $A$ هي مجموعة اسماء الشهور بين يوم الأم واليوم العالمي للتحصيل.

(b) $21 \in \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$

(c) صفر لا ينتمي إلى {ص، ق، ر}

ثمة ثلاث طرق شائعة لتصميم المجموعات:

1. طريقة *القائمة* أو ذكر *العناصر*.
2. *الطريقة* الوصفية.
3. رمز *بناء* المجموعة.

إننا نعرف بالفعل الكثير عن استخدام طريقة القائمة أو ذكر العناصر؛ حيث تُدرج عناصر المجموعة بين قوسين ويتم الفصل بينها بالفاصلة، كما في الأمثلة 1 إلى 3.
تستخدم **الطريقة الوصفية** عبارة لفظية قصيرة لوصف المجموعة.

### مثال 4 وصف المجموعة باستخدام الطريقة الوصفية

استخدم الطريقة الوصفية لوصف المجموعة $B$ التي تتضمن الأعداد 2 و4 و6 و8 و10 و12 بطريقتَين مختلفتَين.

#### الحل

إن كل العناصر التي في المجموعة أعداد طبيعية زوجية، وجميعها أقل من 14، ومن ثم تكون $B$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية التي تقل عن 14. توجد طرق أخرى كثيرة يمكن وصف المجموعة بها. ومن بين الطرق الأخرى "مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقع بين 1 و15 وتقبل القسمة على 2".

## جرّب هذا 4

استخدم الطريقة الوصفية لوصف المجموعة $A$ التي تتضمن العناصر $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ بطريقتين مختلفتين.

أما الطريقة الثالثة (والأرقى) لتصميم المجموعة، فهي **رمز بناء المجموعة**، وتستخدم هذه الطريقة *المتغيرات*.

**المتغير** عبارة عن رمز (يكون حرفًا عادة) يمكن أن يمثل عناصر مختلفة في مجموعة ما.
يستخدم رمز بناء المجموعة المتغير والأقواس والعمود الرأسي | الذي يُقرأ "بحيث". على سبيل المثال، يمكن كتابة المجموعة {1, 2, 3, 4, 5, 6} باستخدام رمز بناء المجموعة كما يلي

$$\{x | x \in N \text{ و } x < 7\}$$

ويقرأ ذلك كما يلي "مجموعة العناصر $x$ بحيث $x$ عدد طبيعي و $x$ أقل من 7." يمكننا استخدام أي حرف أو رمز للمتغير، لكن يشيع استخدام $x$. (إذا كنت ترغب في مراجعة رموز المتباينة، فراجع موارد مراجعة الجبر عبر الإنترنت).

**ملاحظة رياضية**

عندما تسمع *متغيرًا*، قد تفكر تلقائيًا في حرف، مثل $x$ أو $y$. لكن ينبغي لك التفكير فيما تعنيه كلمة *المتغير* بالفعل: شيء ما يمكن أن يتغير أو يتنوع. والمتغير هو مجرد رمز يمثل عددًا أو شيئًا ما يمكن أن يتغير.

### مثال 5 كتابة مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة

استخدم رمز بناء المجموعة لتصميم كل مجموعة، ثم اكتب كيف ستُقرأ إجابتك بصوت عالٍ.

(a) تحتوي المجموعة $R$ على العناصر 2 و4 و6.
(b) تحتوي المجموعة $W$ على العناصر أحمر وأصفر وأزرق.

#### الحل

(a) $R = \{x | x \in E \text{ و } x < 7\}$، المجموعة $x$ بحيث $x$ عددٌ طبيعيٌّ زوجيٌّ و $x$ أقل من 7.
(b) $W = \{x | x$ لون أساسي}، مجموعة $x$ بحيث $x$ لون أساسي.

**ملاحظة رياضية**

لعلك لاحظت أن أحد الأمور الرائعة حول رمز المجموعة هو وجود أكثر من طريقة غالبًا لكتابة المجموعة في المثال 5. كان يمكننا كتابة $W = \{x | x$ أحد ألوان علم كولومبيا}.

## جرّب هذا 5

استخدم رمز بناء المجموعة لتصميم كل مجموعة، ثم اكتب كيف ستُقرأ إجابتك بصوت عالٍ.

(a) تحتوي المجموعة $K$ على العناصر 18 ,16 ,14 ,12 ,10.
(b) تحتوي المجموعة $W$ على العناصر دانماركي وروماني.

## مثال 6 استخدام رموز المجموعات المختلفة

حدد المجموعة $S$ التي تضم العناصر . . . ,35 ,34 ,33 ,32 باستخدام

(a) طريقة ذكر العناصر.
(b) الطريقة الوصفية.
(c) رمز بناء المجموعة.

**الحل**

(a) {32, 33, 34, 35, . . .}

(b) المجموعة $S$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من 31.

(c) $\{x | x \in N$ و $x > 31\}$

## جرّب هذا 6

صمّم المجموعة التي تضم العناصر . . . ,17 ,15 ,13 ,11 باستخدام

(a) طريقة ذكر العناصر.
(b) الطريقة الوصفية.
(c) رمز بناء المجموعة.

إذا تضمنت المجموعة عناصر متعددة، فيمكننا إعادة استخدام علامة القطع لتمثيل العناصر المفقودة طالما كنا نستخدم نمطًا واضحًا. على سبيل المثال، تتضمن المجموعة {100 ,99 ,. . . ,3 ,2 ,1} كل الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100. وبالمثل، والمجموعة {a, b, c, . . ., $x$, y, z} تتضمن كل الحروف الهجائية الإنجليزية.

## مثال 7 كتابة مجموعة باستخدام علامة القطع

باستخدام ذكر العناصر، اكتب المجموعة التي تتضمن كل الأعداد الطبيعية الزوجية التي بين 99 و201.

**الحل**

{100, 102, 104, . . . , 198, 200}

## جرّب هذا 7

باستخدام ذكر العناصر، اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي بين 50 و500.

2. كتابة المجموعات بثلاث طرق مختلفة.

توجد بعض الحالات التي يكون من الضروري فيها تحديد المجموعة من دون عناصر. على سبيل المثال، لن تتضمن مجموعة الرئيسات السيدات للولايات المتحدة أشخاصًا، ومن ثم تكون بلا عناصر (على الأقل حتى كتابة هذه السطور).

تُسمى المجموعة التي لا تتضمن أي عناصر **المجموعة الخالية**. والرمزان المستخدمان لتمثيل المجموعة الخالية هما { } أو $\emptyset$.

## مثال 8 تحديد المجموعات الخالية

أي من المجموعات التالية خالية؟

(a) مجموعة أحافير الماموث في المتاحف
(b) $\{x|x$ ماموث صوفي حي$\}$
(c) $\{\emptyset\}$
(d) $\{x|x$ عدد طبيعي محصور بين 1 و2$\}$

### الحل

(a) توجد بشكل مؤكد أحفورة ماموث على الأقل في أحد المتاحف في مكان ما، ومن ثم فإن المجموعة غير خالية.
(b) لقد انقرضت حيوانات الماموث منذ 8,000 سنة تقريبًا، ومن ثم تكون هذه المجموعة خالية بالتأكيد.
(c) هذه المجموعة مخادعة. فكل من { } و$\emptyset$ يمثل المجموعة الخالية، لكن $\{\emptyset\}$ هي مجموعة تتضمن المجموعة الخالية، والتي تحتوي على عنصر واحد. انتبه، إنها تتضمن عنصرًا واحدًا.
(d) هذه المجموعة خالية حيث لا توجد أعداد طبيعية بين 1 و2.

**ملاحظة رياضية**

في ديسمبر 2011، أعلنت مجموعة من العلماء من اليابان وروسيا أنها تأمل في استنساخ ماموثًا من الحمض النووي المتجمد لفترة طويلة والموجود في سيبيريا خلال 5 سنوات. أعتقد أننا قد نتفق جميعًا على أنه سيكون رائعًا جدًا. لذا فأنا أحتفظ بالحق في تغيير إجابتي عن المثال 8(b).

## جرّب هذا 8

أي من المجموعات التالية خالية؟

(a) $\{x|x$ عدد طبيعي يقبل القسمة على 7$\}$
(b) $\{x|x$ إنسان يعيش على كوكب المريخ$\}$
(c) $\{\{\ \}\}$
(d) تتألف المجموعة $Z$ من الأشخاص الذين يعيشون على الأرض وتزيد أعمارهم عن 120 سنة.

**تنبيه**

تأكد من أنك لا تكتب المجموعة الخالية على الصورة $\{\emptyset\}$؛ حيث تشير الأقواس إلى مجموعة تحتوي على ما بداخلها، بحيث يمثل الرمز مجموعة تحتوي على عنصر واحد؛ المجموعة الخالية.

3. تعريف المجموعة الخالية.

## العدد الرئيس للمجموعة

يُسمى عدد العناصر في المجموعة *العدد الرئيس* للمجموعة. على سبيل المثال، تحتوي المجموعة $R = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ على عدد رئيس يساوي 5 لأنها تحتوي على 5 عناصر. كما يمكن التعبير عن ذلك أيضًا بقولنا **عدد العناصر الرئيسة** للمجموعة $R$ هو 5. ويُعرَّف رسميًا كما يلي.

**العدد الرئيس** لمجموعة هو عدد العناصر فيها. بالنسبة إلى المجموعة $A$ يرمز لعدد العناصر الرئيسة فيها $n(A)$، والذي يُقرأ "$n$ لـ $A$".

## مثال 9 إيجاد عدد العناصر الرئيسة لمجموعة

أوجد العدد الرئيس لكل مجموعة.

(a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
(b) $B = \{x|x \in N$ و $x < 16\}$
(c) $C = \{16\}$
(d) $\emptyset$

### الحل

(a) $n(A) = 6$ لأن المجموعة $A$ تحتوي على 6 عناصر
(b) $B$ هي المجموعة $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 14, 15\}$، التي تحتوي على 15 عنصرًا. ومن ثم تكون $n(B) = 15$.
(c) $n(C) = 1$ لأن المجموعة $C$ تحتوي على عنصر واحد
(d) $n(\emptyset) = 0$ حيث لا توجد عناصر في المجموعة الخالية

## جرّب هذا 9

أوجد العدد الرئيس لكل مجموعة.

(a) $A = \{z, y, x, w, v\}$
(b) $B = \{x | x \in E$ و $15 < x < 31\}$
(c) $C =$ {شيفروليه}

4. إيجاد عدد العناصر الرئيسة في المجموعة.

## المجموعات المنتهية وغير المنتهية

يمكن تصنيف المجموعات إلى منتهية أو غير منتهية.

تسمى المجموعة **منتهية** إذا تضمنت عددًا مُحددًا من العناصر، أو كان عدد عناصرها عددًا طبيعيًّا. وتُسمى المجموعة التي ليست منتهية **مجموعة غير منتهية** إذا تتضمنت عدد غير مُحدد من العناصر

فالمجموعة {p, q, r, s} منتهية لأنها تحتوي على أربعة عناصر: p وq وr وs. أما المجموعة {. . . ,10, 20, 30} غير منتهية لأنها تحتوي على عدد غير مُحدد من العناصر: فهي كل الأعداد الطبيعية التي تمثل مضاعفات العدد 10.

### مثال 10 تصنيف المجموعات إلى منتهية وغير منتهية

صنّف كل مجموعة إلى منتهية أو غير منتهية.

(a) $\{x | x \in N$ و $x < 100\}$

(b) المجموعة $R$ هي مجموعة الحروف المستخدمة لكتابة الأعداد الرومانية.

(c) {100, 102, 104, 106, . . .}

(d) المجموعة $M$ هي مجموعة أفراد أسرتك الحالية.

(e) المجموعة $S$ هي مجموعة الأناشيد التي يمكن كتابتها.

**الحل**

(a) المجموعة منتهية حيث يوجد 99 عددًا طبيعيًّا أقل من 100.

(b) المجموعة منتهية حيث إن الحروف المستخدمة هي C وD وI وL وM وV و$X$.

(c) المجموعة غير منتهية حيث إنها تتكون من عدد غير مُحدد من العناصر.

(d) المجموعة منتهية حيث يوجد عدد مُحدد من الأشخاص في أسرتك الحالية.

(e) المجموعة غير منتهية حيث يمكن كتابة عدد غير مُحدد من الأناشيد.

**ملاحظة رياضية**

إذا كنت تتساءل عن كيفية وصف عدد العناصر الرئيسة للمجموعة غير المنتهية، فستحب القسم 5.

## جرّب هذا 10

صنّف كل مجموعة إلى منتهية أو غير منتهية.

(a) المجموعة $P$ هي مجموعة الأعداد التي تتضمن مضاعفات العدد 6.

(b) $\{x | x$ هو عدد المجلس الوطني الاتحادي$\}$

(c) {3, 6, 9, . . . , 24}

(d) مجموعة كلمات مرور أجهزة الكمبيوتر المحتملة

5. تصنيف المجموعات إلى منتهية أو غير منتهية.

## المجموعات المتساوية والمتكافئة

عند دراسة نظرية المجموعات، سنحتاج إلى فهم الفرق بين مفهومَين أساسيَّين: *المجموعات المتساوية والمجموعات المتكافئة*.

تكون المجموعتان $A$ و$B$ **متساويتين** (تُكتبان على الصورة $A = B$) إذا كان بهما العناصر نفسها. وتُعتبر المجموعتان المنتهيتان $A$ و$B$ **متكافئتَين** (تُكتبان على الصورة $A \cong B$) إذا كان بهما عدد العناصر نفسه؛ أي أن $n(A) = n(B)$.

فمثلًا تتساوى المجموعتان {a, b, c} و{c, b, a} حيث إنهما تحتويان على العناصر نفسها a وb وc. كما أن المجموعة {4, 5, 6} تساوي المجموعة {4, 4, 5, 6} حيث لا يلزم كتابة 4 مرتين في المجموعة الثانية. أما المجموعة التي تضم كافة أسماء الطلاب في صفك ومجموعة بطاقات تعريفهم فمتكافئتان لأنهما تحتويان على عدد العناصر نفسه لكن العناصر مختلفة ومن ثم تكونان غير متساويتَين.

**ملاحظة رياضية**

كل المجموعات المتساوية متكافئة لأن كلتا المجموعتَين ستحتوي على عدد العناصر نفسه، ولكن ليست كل المجموعات المتكافئة متساوية.

## مثال 11 تحديد ما إذا كانت المجموعات متساوية أم متكافئة

حدد ما إذا كان كل زوج من المجموعات متساويًا أم متكافئًا أم غير ذلك.

(a) {p, q, r, s}; {a, b, c, d}
(b) {8, 10, 12}; {12, 8, 10}
(c) {213}; {2, 1, 3}
(d) {1, 2, 10, 20}; {2, 1, 20, 11}
(e) {الأعداد الطبيعية الزوجية التي تقل عن 10}؛ {2, 4, 6, 8}

### الحل

(a) متكافئتان
(b) متساويتان ومتكافئتان
(c) لا شيء منهما
(d) متكافئتان
(e) متساويتان ومتكافئتان

**ملاحظة رياضية**

هل تفكر في مجموعتَين متساويتَين لكنهما غير متكافئتَين؟ ماذا عن العكس؟ ما الذي يمكنك استنتاجه؟

## جرّب هذا 11

حدد ما إذا كان كل زوج من المجموعات متساويًا أم متكافئًا أم غير ذلك.

(a) {ك، ل، ب}؛ {ق، ط، ة}
(b) {مطر}؛ {م، ط، ر}
(c) {ق، ل، ب}؛ {ب، ق، ل}
(d) {10, 20, 30}; {1, 3, 5}

عندما تحتوي مجموعتان على عدد من العناصر صغير نسبيًّا، تتمثل الطريقة الأسهل لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متكافئتَين أم لا في عدّ عدد العناصر، لكن عندما تكون المجموعتان كبيرتَين، أو غير منتهيتَين، فهناك طريقة ذكية لمعرفة المجموعتين المتكافئتين؛ تُسمى وضعهما في تناظر واحد لواحد. سيكون هذا مفيدًا حقًّا عند دراسة المجموعات غير المنتهية في القسم 5.

يكون بين المجموعتَين **تناظر واحد لواحد** للعناصر إذا كان كل عنصر في المجموعة الأولى يمكن إقترانه بعنصر واحد فقط من المجموعة الثانية وكل عنصر في المجموعة الثانية يمكن إقترانه بعنصر واحد فقط في المجموعة الأولى.

## مثال 12 وضع المجموعات في تناظر واحد لواحد

أثبت أن (a) المجموعتَين {8, 16, 24, 32} و{s, t, u, v} بينهما تناظر واحد لواحد و(b) المجموعتَين {$x$, $y$, $z$} و{5, 10} ليس بينهما تناظر واحد لواحد. ثم استنتج خلاصة حول ما يجب أن يفعله التناظر واحد لواحد بالنسبة إلى تكافؤ المجموعات.

### الحل

(a) إننا نحتاج إلى إثبات أن كل عنصر في إحدى المجموعتَين يمكن إقترانه بعنصر واحد فقط في المجموعة الثانية. فيما يلي توضيح طريقة ممكنة لإثبات تناظر واحد لواحد:

$$\begin{array}{cccc}\{8, & 16, & 24, & 32\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{s, & t, & u, & v\}\end{array}$$

(b) لا يمكن وضع عناصر المجموعتَين {$x$, $y$, $z$} و{5, 10} في تناظر واحد لواحد. وبغض النظر عن كيفية المحاولة، سيكون هناك عنصر في المجموعة الأولى لا يناظر أي عنصر في المجموعة الثانية.

ما الذي يمكننا استنتاجه؟ إن المجموعتَين اللتين يمكن وضعهما في تناظر واحد لواحد بهما عدد العناصر نفسه أما المجموعتان اللتان لا يمكن وضعهما في تناظر واحد لواحد بهما عدد مختلف من العناصر. الاستنتاج؟ تكون المجموعتان متكافئتَين تحديدًا إذا أمكن وضعهما في تناظر واحد لواحد.

فريقا كرة سلة على أرضية الميدان بينهما تناظر واحد لواحد (على فرض أن كل فريق يتضمن خمسة لاعبين).

## جرّب هذا 12

أثبت أن المجموعتَين {شمال، جنوب، شرق غرب} و{شمس، مطر، ثلج، برَد} بينهما تناظر واحد لواحد.

6. تحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتَين أم متكافئتَين.

**المجموعات المتناظرة والمتكافئة**

تكون المجموعتان

- متكافئتَان إذا كان يمكن وضع عناصرهما في تناظر واحد لواحد.
- غير متكافئتَين إذا لم نتمكن من وضع عناصرهما في تناظر واحد لواحد.

## إجابات جرّب هذا

1 {January, February, May, July}

2 (a) {80, 82, 84, 86, 88, 90}
(b) {11, 13, 15, 17, . . .}

3 (a) صائبة (b) خاطئة (c) صائبة

4 مجموعة الأعداد الصحيحة من $-3$ إلى 3

5 (a) $K = \{x | x \in E$ و $x > 9$ و $x < 19\}$. مجموعة $x$ بحيث $x$ هو عددٌ طبيعيٌّ زوجيٌّ و$x$ أكبر من 9 و$x$ أقل من 19.
(b) $W = \{x | x$ جنسية أوروبية$\}$، مجموعة $x$ بحيث $x$ هي جنسية أوروبية.

6 (a) {11, 13, 15, 17, . . .}
(b) مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تزيد عن 10
(c) $\{x \mid x \in N$، $x$ عدد فردي و $x > 10\}$

7 {51, 53, 55, . . . , 497, 499}

8 (b) و(d)

9 (a) 5 (b) 8 (c) 1

10 (a) غير منتهية (b) منتهية (c) منتهية (d) غير منتهية

11 (a) متكافئتان (b) لا شيء منهما (c) متساويتان ومتكافئتان (d) متكافئتان

12 شمال جنوب شرق غرب
↕ ↕ ↕ ↕
شمس مطر ثلج برَد

# 5-1 مجموعة التمارين

## دليل الدراسة

### التمارين الكتابية

1. اشرح ما المقصود بالمجموعة.
2. ما معنى أن تكون المجموعة محدودة؟
3. اكتب مثالًا لمجموعة محدودة، وأخرى غير محددة. (لا تقتبس أمثلة من الكتاب!)
4. اذكر ثلاث طرق لكتابة المجموعات وصِفها.
5. ما الفرق بين المجموعتَين المتساويتَين والمتكافئتَين؟
6. اشرح الفرق بين المجموعة المنتهية وغير المنتهية.
7. ما المقصود بـ "تناظر واحد لواحد بين مجموعتَين"؟
8. عرّف المجموعة الخالية واذكر مثالَين لمجموعة خالية.

### التمارين الحسابية

*بالنسبة إلى التمارين 22-9، اكتب كل مجموعة باستخدام طريقة ذكر العناصر. انتبه للعناصر المتكررة، وفكر في سبب عدم احتياجك إلى إدراج العنصر نفسه أكثر من مرة واحدة. قد ترغب في القيام ببحث بسيط عبر الإنترنت بالنسبة إلى بعض المسائل.*

9. $T$ هي مجموعة الحروف في كلمة تفكير.
10. $A$ هي مجموعة ألوان علم دولة الامارات العربية المتحدة.
11. $P$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 50 و60.
12. $R$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية المحصورة بين 10 و40.
13. $C = \{x | x \in N \text{ و } x < 9\}$
14. $F = \{x | x \in N \text{ و } x > 100\}$
15. $G = \{x | x \in N \text{ و } x > 10\}$
16. $B$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من 100.
17. $Y$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية بين 2,000 و3,000.
18. $Z = \{x | x \in N \text{ و } 500 < x < 6{,}000\}$
19. $C$ هي مجموعة الألوان في أعلام البلدان التي تبدأ بحرف $O$ في اللغة الإنجليزية.
20. $S$ هي مجموعة لاعبي اتحاد الإمارات العربية المتحدة لكرة السلة.
21. $L$ هي مجموعة الأربطة التي في ركبة الإنسان.
22. $A$ هي مجموعة عواصم الإمارات السبعة في الإمارات العربية المتحدة.

*بالنسبة إلى التمارين 28-23، حدد ما إذا كانت العبارة صائبة أم خاطئة.*

23. $5 \in \{1, 3, 5, 7\}$
24. $8 \notin \{2, 4, 6, \ldots\}$
25. $\frac{1}{2} \notin N$
26. $0.6 \in N$
27. $\{x | x$ ديناصور ستيجوسورس حي$\}$ مجموعة خالية.
28. أبو ظبي تنتمي إلى $\{x | x$ إحدى الإمارات العربية$\}$

*بالنسبة إلى التمارين 36-29، اكتب كل مجموعة باستخدام الطريقة الوصفية.*

29. $\{5, 10, 15, 20, \ldots\}$
30. $\{4, 8, 12, 16\}$
31. $\{13, 26, 39, 52\}$
32. $\{7, 14, 21, 28, \ldots\}$
33. $\{s, t, e, v, n\}$
34. $\{a, u, g, s, t\}$
35. $\{100, 101, 102, \ldots, 199\}$
36. $\{21, 22, 23, \ldots, 29, 30\}$

*بالنسبة إلى التمارين 42-37، اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة، ثم اكتب وصفًا بديلًا لكل مجموعة.*

37. $\{10, 20, 30, 40, \ldots\}$
38. $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
39. $X$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأقل من 16.
40. $Z$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 70 و76.
41. {أحمر، أبيض، أزرق}
42. {أسود، أبيض، أحمر، أخضر}

*بالنسبة إلى التمارين 48-43، اذكر العناصر في كل مجموعة.*

43. $H$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 0.
44. $\{x | x \in N \text{ و } 70 < x < 80\}$
45. $\{x | x$ أحد فصول السنة$\}$
46. $R$ هي مجموعة الحروف التي يمكن أن تكون ساكنة أو متحركة في اللغة الإنجليزية.
47. $\{x | x$ عدد طبيعي زوجي بين 100 و120$\}$
48. $\{x | x$ عدد طبيعي فردي بين 90 و100$\}$

*بالنسبة إلى التمارين 54-49، حدد ما إذا كانت كل مجموعة محدودة أم ليست محدودة.*

49. $L$ هي مجموعة المتسابقين الذين ربحوا في برنامج المسابقات.
50. $\{A | A$ مجموعة الطلاب الذين حصلوا على شهادات تقدير في الشارقة$\}$
51. {لاعبو كرة السلة في اتحاد الإمارات العربية المتحدة الذين أحرزوا غمسات رائعة الأسبوع الماضي}
52. $N$ هي مجموعة المرضى المستحقين لزراعة القلب.
53. $B = \{x | x$ عدد كبير$\}$
54. $C = \{x | x$ عدد أكبر من عدد السكان في الإمارات العربية المتحدة$\}$

*بالنسبة إلى التمارين 60-55، حدّد ما إذا كانت العبارة صائبة أم خاطئة.*

افترض أن $A$ = مجموعة المحيطات

$B = \{10, 20, 30, 40, \ldots\}$

$C$ = مجموعة لاعبي كرة القدم المشهورين

55. $35 \in B$
56. ليبرون جيمس ينتمي إلى $C$
57. البحر الأبيض المتوسط لا ينتمي إلى $A$
58. $350 \in B$
59. المحيط الهادئ ينتمي إلى $A$
60. ديفيد بيكهام ينتمي إلى $C$

*بالنسبة إلى التمارين 68-61، حدد ما إذا كانت كل مجموعة غير منتهية أم منتهية.*

61. {$x$ | $x$ ينتمي إلى $N$ و$x$ عدد زوجي}
62. $\{1, 2, 3, \ldots, 999, 1{,}000\}$
63. $K$ هي مجموعة الحروف الأبجدية العربية.
64. {$x$ | $x$ ينتمي إلى أعداد المدارس الثانوية في إمارة دبي}
65. {$x$ | $x$ ينتمي إلى $N$ و$x$ عدد يكون آحاده صفرًا}
66. $\emptyset$
67. {$x$ | $x$ برنامج تلفزيوني حالي}
68. {$x$ | $x$ كسر}

*بالنسبة إلى التمارين 74-69، حدد ما إذا كان كل زوج من المجموعات متساويًا أم متكافئًا أم لا هذا ولا ذاك.*

69. $\{s, t, u, v, w\}$ و$\{t, v, w, s, u\}$
70. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ و$\{10, 20, 30, 40, 50\}$
71. $\{2, 4, 6, 8\}$ و$\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
72. {واحد} و{و، ا، ح، د}
73. $\{3\}$ و$\{\emptyset\}$
74. {$x$ | $x$ ينتمي إلى أسماء الشهور التي تتكون من 30 يومًا بالتحديد} و{أبريل، يونيه، سبتمبر، نوفمبر}

*بالنسبة إلى التمارين 78-75، أثبت أن كل زوج من المجموعات متكافئ باستخدام تناظر واحد لواحد.*

75. $\{10, 20, 30, 40\}$ و$\{40, 10, 20, 30\}$
76. $\{w, x, y, z\}$ و$\{1, 2, 3, 4\}$
77. $\{x \mid x \in N\}$ و{$x$ | $x$ من مضاعفات العدد 4}
78. {$x$ | $x$ عدد طبيعي فردي أقل من 11} و{$x$ | $x$ عدد طبيعي زوجي أقل من 12}

*بالنسبة إلى التمارين 86-79، جد العدد الرئيس لكل مجموعة.*

79. $A = \{63, 72, 51, 44\}$
80. $B = \{10, 11, 12, \ldots, 20\}$
81. $C =$ {$x$ | $x$ يوم في الأسبوع}
82. $D =$ {$x$ | $x$ شهر في السنة}
83. $E =$ {ثلاثة}
84. $F =$ {ث، ل، ا، ة}
85. $G =$ {$x$ | $x$ ينتمي إلى $N$ و$x$ عدد سالب}
86. $H = \emptyset$

*بالنسبة إلى التمارين 92-87، حدّد ما إذا كانت كل عبارة صائبة أم خاطئة.*

87. كل المجموعات المتساوية متكافئة.
88. لا توجد مجموعات متكافئة متساوية.
89. $n(\{\emptyset\}) = 0$
90. $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ مجموعة منتهية
91. $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ مكافئة لـ $\{10, 20, 30, 40, \ldots\}$
92. $n(\{\ \}) = 0$

## التطبيقات في عالمنا

93. يوضح الجدول أعلى 10 ولايات من حيث عدد المهاجرين الممنوحين إقامة دائمة في 2015.

| الولاية | عدد المهاجرين | % من إجمالي المهاجرين إلى الولايات المتحدة |
|---|---|---|
| كاليفورنيا | 209,568 | 19.9% |
| نيويورك | 130,010 | 12.4% |
| فلوريدا | 118,873 | 11.3% |
| تكساس | 99,727 | 9.5% |
| نيو جيرسي | 49,801 | 4.7% |
| إلينوي | 40,482 | 3.9% |
| ماساشوستس | 28,535 | 2.7% |
| فيرجينيا | 27,622 | 2.6% |
| جورجيا | 25,919 | 2.5% |
| بنسلفانيا | 24,969 | 2.4% |

المصدر: وزارة الأمن الداخلي في الولايات المتحدة

(a) اذكر مجموعة الولايات التي يزيد عدد مهاجريها على 100,000.
(b) اذكر عناصر مجموعة الولايات المذكورة ضمن أعلى 10 ولايات ويقل عدد مهاجريها عن 50,000.
(c) اسرد عناصر {$x$ | $x$ الولاية التي تتضمن 4% على الأقل من إجمالي المهاجرين}.
(d) اذكر عناصر {$x$ | $x$ الولاية التي تتضمن ما يتراوح بين 3% و10% من إجمالي المهاجرين}.

94. يسرد الجدول عدد درجات البكالوريوس التي تم منحها في الإمارات العربية المتحدة في أفضل 10 تخصصات لعام 2009 في الجدول، إلى جانب بيانات عامي 1999 و2014 أيضًا.

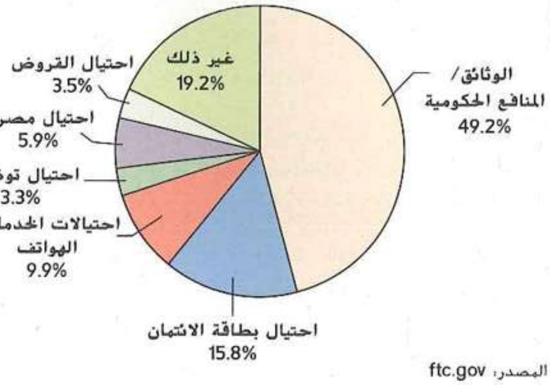
(a) اسرد مجموعة التخصصات التي زادت شعبيتها في كل عام مذكور.
(b) اسرد مجموعة التخصصات التي لم تزد شعبيتها من 2009 حتى 2014.
(c) اسرد مجموعة التخصصات التي تضم ما يتراوح بين 90,000 و120,000 درجة تم منحها عام 2014.
(d) جد المجموعة {$x$ | $x$ زيادة الشعبية بين 2004 و2009}.
(e) لإيجاد نسبة الزيادة $P$ بين الكمية الأصلية $O$ والكمية الجديدة $N$، استخدم الصيغة التالية: $P = (N - O)/O$. احسب نسبة زيادة أي تخصص شهد زيادة في عدد الدرجات التي تم منحها بين عامي 2009 و2014. اسرد بعض التخصصات التي زادت على الأقل بنسبة 30%.

# مجموعة التمارين يُتبع

| التخصص | 2004 | 2009 | 2014 |
|---|---|---|---|
| قطاع الأعمال | 307,149 | 348,056 | 358,079 |
| المهن الصحية والبرامج ذات الصلة | 73,934 | 120,420 | 198,770 |
| العلوم الاجتماعية والتاريخ | 150,357 | 168,517 | 173,096 |
| علم النفس | 82,098 | 94,273 | 117,298 |
| العلوم البيولوجية والطبية | 62,624 | 82,828 | 104,633 |
| التربية | 106,278 | 101,716 | 98,854 |
| الفنون المرئية والاستعراضية | 77,181 | 89,143 | 97,246 |
| الهندسة | 63,410 | 68,911 | 92,162 |
| التواصل والصحافة والبرامج ذات الصلة | 70,968 | 77,984 | 87,604 |
| الأمن الداخلي وإنفاذ القانون ومكافحة الحرائق | 28,175 | 41,788 | 62,409 |

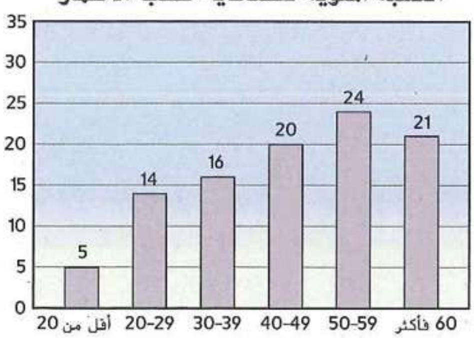
المصدر: شبكة الحارس المستهلك

**أنواع احتيالات سرقة الهوية المبلَّغ عنها في عام**




المصدر: ftc.gov

**النسبة المئوية للضحايا حسب الأعمار**




95. تُعد سرقة الهوية الآن إحدى أكثر الجرائم المكلفة في الولايات المتحدة، وتؤثر غالبًا في البالغين الأصغر سنًّا. فمن بين 251,000 شكوى بسرقة الهوية قُدمت إلى لجنة التجارة الاتحادية (FTC) عام 2015، كان أكثر من 30% من أعمار الضحايا أقل من 30 سنة. يوضح المخطط التالي أنواع حالات سرقة الهوية التي تم الإبلاغ عنها في عام 2015 ونسبة الضحايا حسب العمر.

(a) اذكر عناصر مجموعة تضم نوعَي سرقة الهوية الأقل نسبة من بين الجرائم المبلَّغ عنها.

(b) اذكر عناصر مجموعة الفئات العمرية التي تزيد نسبتها عن 18%.

(c) اذكر عناصر مجموعة أنواع سرقة الهوية التي شكّلت أكثر من نسبة 15% من بين الجرائم المبلَّغ عنها.

(d) اذكر عناصر المجموعة $\{x/x$ نسبة الذين أعمارهم 40 سنة فأكثر من بين ضحايا سرقة الهوية$\}$.

(e) اذكر عناصر المجموعة $\{x|x$ نوع الحالة التي وقعت بنسبة تتراوح بين 10% و20% من الجرائم المبلَّغ عنها$\}$.

(f) أضِف النسب المئوية التي في المخطط الدائري. ماذا تلاحظ؟ هل يمكنك التفكير في التفسيرات المحتملة؟

96. تزامن ازدهار التوزيع الرقمي للموسيقى مع انهيار القرص المدمج، على الأقل فيما يتعلق بالمبيعات. يوضح المخطط عدد الأقراص المدمجة والألبومات المنزَّلة التي تم بيعها (بالملايين) لبعض السنوات الأخيرة، بالإضافة إلى قيمة تلك المبيعات (أيضًا بالملايين).

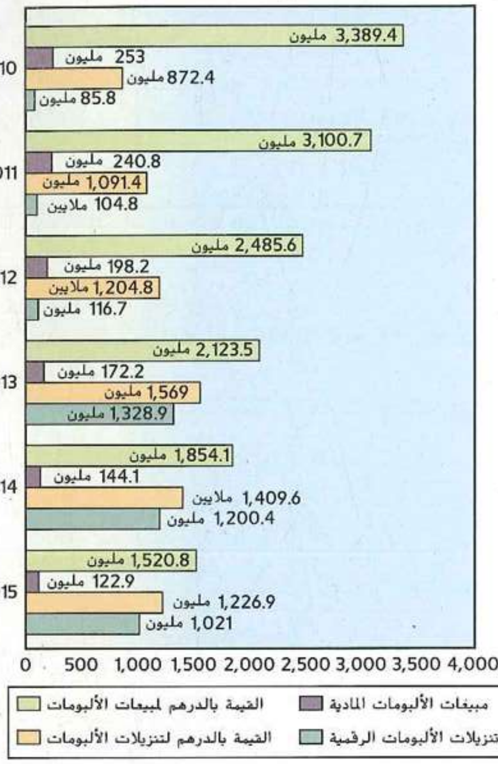
(a) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي تجاوزت خلالها مبيعات القرص المدمج قيمة تنزيلات الألبومات.

(b) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي قلّت فيها قيمة تنزيلات الألبومات عن السنة السابقة.

(c) اذكر عناصر $\{x|x$ السنة التي انخفض فيها عدد مبيعات الألبومات بما يزيد على 25 مليون وحدة$\}$.

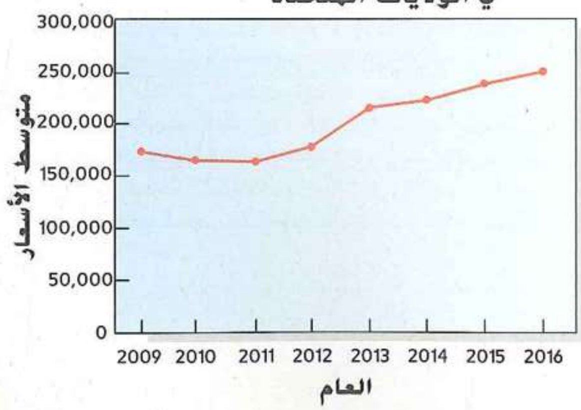
(d) اذكر عناصر المجموعة $\{x|x$ القيمة الدرهمية لتنزيلات الألبومات التي شكّلت زيادة تزيد عن 100 مليون AED من العام السابق$\}$.

**مبيعات الأقراص المدمجة مقابل تنزيلات الألبومات في الولايات المتحدة**




97. لقد استغرق الأمر بعض الوقت، لكن في عام 2015، وصلت أسعار المساكن أخيرًا إلى قيم مماثلة للأسعار قبل انهيار الإسكان في عام 2006. يعرض التمثيل البياني الخطي أدناه متوسط أسعار المساكن الحالية في الإمارات العربية المتحدة للأعوام من 2009 إلى 2016.

**متوسط أسعار المساكن الحالية في الولايات المتحدة**




المصدر: الرابطة الوطنية للوسطاء العقاريين

(a) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي كان فيها متوسط الأسعار فوق $200,000\$$.

(b) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي كان فيها متوسط الأسعار يتراوح بين $170,000\$$ و$200,000\$$.

(c) جد $\{x|x$ السنة التي زاد فيها متوسط الأسعار عن السنة السابقة$\}$.

(d) جد $\{x/x$ السنة التي انخفض فيها متوسط الأسعار عن السنة السابقة$\}$.

## التفكير الناقد

98. إذا كانت $A \cong B$ و$A \cong C$، فهل $B \cong C$؟ اشرح إجابتك.

99. هل $\{0\}$ مكافئة لـ $\emptyset$؟ اشرح إجابتك.

100. اكتب مجموعتَين متكافئتَين ولكن غير متساويتَين. لماذا لا يمكن كتابة مجموعتَين متساويتَين ولكن غير متكافئتَين؟

101. إننا نعرف أن المجموعتَين تكونان متكافئتَين إذا استطعنا الربط بين عناصرهما بتناظر واحد لواحد.

(a) ما المجموعة التي تضم عناصر أكثر:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
أو $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$؟

(b) اكتب المقابلة بين المجموعتَين $A$ و$B$ حيث يتقابل كل عنصر في $A$ مع مثلَيه في $B$. هل يغير هذا تفكيرك بشأن إجابتك عن الجزء (a)؟ (إذا وجدت هذه المسألة ممتعة، فستحب القسم 5 كثيرًا).

102. (a) اذكر كل المجموعات المختلفة التي يمكنك تكوينها باستخدام العناصر التي في المجموعة $\{2, 4, 6\}$ فقط.

(b) توجد ثماني مجموعات يمكن تكوينها في الجزء (a). هل وجدت سبعًا منها؟ إذا كنت قد وجدتها، فهل يمكنك توضيح سبب ترك واحدة؟

103. اشرح لماذا تُعد كل من المجموعات التالية غير محدودة.

(a) مجموعة جميع الأوروبيين.

(b) مجموعة السيارات الفاخرة من طراز 2011

(c) مجموعة جميع الكليات التي لها فرصة مشروعة للفوز ببطولة كرة السلة (ثمة سببان على الأقل!)

(d) مجموعة جميع الوظائف التي يتقاضى أصحابها ما يزيد على AED 50,000 سنويًا

(e) مجموعة الأمهات

104. أحيانًا عندما تكون المجموعة غير محدودة، يمكنك تقديم وصف أفضل يجعلها محدودة. على سبيل المثال، مجموعة الأفلام الرائعة حقًا من سنة 2016 ليست محدودة. ولكن إذا غيرنا الوصف إلى مجموعة الأفلام التي صدرت عام 2016 وحصلت على 90/100 على الأقل من تقدير النقاد، فسنكون قد حددنا ما نقصد بقولنا "رائعة حقًا"..والآن أصبحت المجموعة محدودة. بالنسبة إلى كل من المجموعات في التمرين 105، اكتب وصفًا يجعل المجموعة محدودة؟

## ملاحظاتي

الدرس

# 5-2 المجموعات الجزئية والعمليات على المجموعات

## أهداف التعلم

1. تعريف متممة المجموعة.
2. إيجاد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة.
3. استخدام رمز المجموعة الجزئية.
4. إيجاد عدد المجموعات الجزئية للمجموعة.
5. إيجاد التقاطعات والاتحادات والفروق بين المجموعات.

لقد رأينا أن نظرية المجموعات تتعلق بتحديد العلاقات بين الأشياء التي يتم تجميعها معًا لسبب ما. وبتناول هذه الفكرة بتوسع أكبر، فإن المجموعات ترتبط غالبًا مع المجموعات الأخرى بعلاقات، وهذا عندما تصبح الأشياء معقدة نوعًا ما. في هذه الحالة، سيكون النظام الخاص بعرض هذه العلاقات ودراستها مفيدًا، وهو في النهاية نوع من النقاط الأساسية لدراسة نظرية المجموعات. لكننا لم نتطرق إلى الآن إلا إلى ظاهر الموضوع. على سبيل المثال، هب أنك أحد أعضاء كلتا مجموعتَي طلاب المدرسة الثانوية والطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية. فمن الممكن أن تكون ضمن مجموعة طلاب الصف العاشر أو مجموعة طلاب الصف الحادي عشر، لكن ليس في كليهما. وربما تكون ضمن مجموعة الطلاب الذين يعيشون بعيدًا عن حرم المدرسة ومجموعة الطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة مشيًا. وربما تكون ضمن مجموعة الطلاب الذين يتناولون الغداء في كافتيريا المدرسة ومجموعة الطلاب الذين يعتقدون أن البطاطس المقلية رطبة جدًا، لكن ليس في مجموعة الأشخاص الذين يضعون صلصة الطماطم ويأكلون الأشياء الرديئة بأي شكل. لنرَ ما الذي يمكننا القيام به حول تنظيم هذه الروابط المعقدة بين المجموعات. في هذا الدرس، سندرس العلاقات بين المجموعات.

لكي نبدأ، سنحتاج إلى التفكير في مفهوم جديد يُسمى *المجموعة الشاملة*.

و**المجموعة الشاملة** الخاصة بحالة مقدَّمة، ورمزها $U$، هي مجموعة جميع الأشياء التي يكون من المنطقي مراعاتها في هذه الحالة.

على سبيل المثال، تحتوي كل المجموعات المذكورة في الفقرة الافتتاحية على أشخاص، ومن ثم يمكننا نظريًّا استخدام مجموعة جميع البشر بوصفها $U$. لكن من الأكثر منطقية أن نقوم بتخصيص $U =$ {طلاب المرحلة الثانوية}.

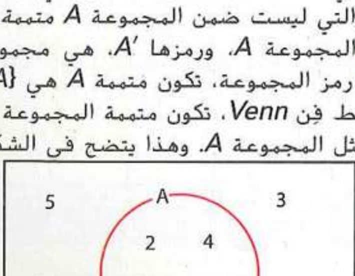
وبمجرد تحديد المجموعة الشاملة في حالة معينة، فإننا نقتصر على التفكير في عناصر هذه المجموعة فقط. إذا كانت $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$، فإن العناصر التي يمكننا استخدامها فقط لتحديد المجموعات الأخرى في هذه الحالة هي مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 8.

سنستخدم في بقية هذه الوحدة طريقة ذكية لتصور المجموعات وعلاقاتها تُسمى **مخطط فِن Venn** (وقد سُمي بذلك نسبة إلى الرجل الذي قام بتطويره، جون فِن، في القرن التاسع عشر). يعرض الشكل 1-2 مثالًا.

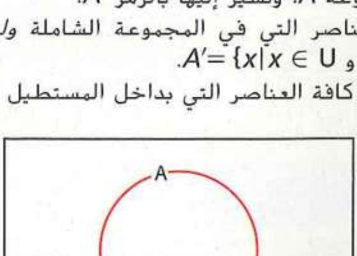
يمكنك الحصول على مزيد من المعلومات من هذه المخطط البسيط. يتم تحديد مجموعة تسمى $A$. والمجموعة الشاملة التي يمكن من خلالها اختيار عناصر المجموعة $A$ هي $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. المجموعة $A$ هي $\{2, 4, 6, 8\}$، والعناصر التي ليست ضمن المجموعة $A$ هي $\{1, 3, 5, 7\}$. سنُسمي عناصر المجموعة $U$ والتي ليست ضمن المجموعة $A$ *متممة المجموعة* $A$، ونشير إليها بالرمز $A'$.

و**متممة** المجموعة $A$، ورمزها $A'$، هي مجموعة العناصر التي في المجموعة الشاملة *وليست* في $A$. باستخدام بناء رمز المجموعة، تكون متممة $A$ هي $A' = \{x | x \in U$ و $x \notin A\}$.

في مخطط فِن Venn، تكون متممة المجموعة $A$ هي كافة العناصر التي بداخل المستطيل وليست داخل الدائرة التي تمثل المجموعة $A$. وهذا يتضح في الشكل 1.




الشكل 1

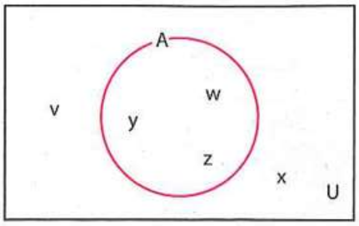



الشكل 2

## مثال 1 إيجاد متممة المجموعة

(a) لتكن $U = \{v, w, x, y, z\}$ و$A = \{w, y, z\}$. جـــد $A'$ وارسم مخطط فِن *Venn* الذي يوضح هذه المجموعات.

(b) ما متممة المجموعة الشاملة لحالة معينة؟




**الشكل 3**

### الحل

(a) باستخدام قائمة العناصر التي في $U$، يلزمنا فقط شطب العناصر التي في $A$ كذلك. وستكون العناصر المتبقية في المجموعة $A'$.

$$U = \{v, w, x, y, z\} \qquad A' = \{v, x\}$$

يظهر مخطط فِن *Venn* في الشكل 3.

(b) لا توجد عناصر في مجموعة شاملة ليست ضمن المجموعة الشاملة، ومن ثم، ووفقًا لتعريف المتممة، لا توجد عناصر في متممة مجموعة شاملة، أي إن المتممة هي المجموعة الخالية.

## جرّب هذا 1

(a) افترض أن $U = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ و$A = \{10, 30, 50\}$. جد $A'$ وارسم مخطط فِن *Venn* الذي يوضح هذه المجموعات.

(b) ما متممة المجموعة الخالية؟

## 1. تحديد متممة المجموعة. المجموعات الجزئية

كنا قد أشرنا في بداية هذا الدرس إلى أنك تنتمي إلى كلتا مجموعتَي طلاب المدرسة الثانوية والطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية. لاحظ أن كل مَن في المجموعة الثانية هو بالفعل في المجموعة الأولى. (فلا شك أنك إذا كنت تخوض دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية، فلابد أن تكون طالبًا في المدرسة الثانوية). ويمكن أن نقول إن مجموعة الطلاب الذين يخوضون الدورة التدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية مشمولون ضمن مجموعة جميع طلاب المدرسة الثانوية. وإذا كانت مجموعة ما مشمولة في مجموعة أخرى، فإننا نُسمي المجموعة الأصغر *مجموعة جزئية* للمجموعة الأكبر.

### المفهوم الأساسي المجموعات الجزئية

إذا كان كل عنصر في المجموعة $A$ عنصرًا في المجموعة $B$، فإن $A$ تُسمى **مجموعة جزئية** للمجموعة $B$. يُستخدم الرمز $\subseteq$ لتحديد المجموعة الجزئية؛ في هذه الحالة، نكتب $A \subseteq B$ وتقرأ $A$ **محتواة في** $B$.

وثمة تعريف آخر يتمثل في أن $A$ مجموعة جزئية من $B$ إذا لم توجد أي عناصر في $A$ ليست أيضًا في $B$. فيما يلي ملحوظتان تتعلقان بالمجموعات الجزئية.

- كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها. يكون كل عنصر في المجموعة $A$ عنصرًا في المجموعة $A$، ومن ثم فإن $A \subseteq A$.
- المجموعة الخالية عبارة عن مجموعة جزئية من كل مجموعة. فالمجموعة الخالية لا تتضمن أي عناصر، ومن ثم، فبالنسبة إلى أي مجموعة $A$، لا يمكنك تحديد أي عنصر $\emptyset$ غير موجود كذلك في $A$.

يوجد العديد من المجموعات الجزئية لهذه المجموعة من الطلاب المستمتعين بعطلة الربيع: المجموعة الجزئية للطالبات الإناث، المجموعة الجزئية للطلاب الذكور، وهكذا.

إذا بدأنا بالمجموعة $\{x, y, z\}$، فلنرَ عدد المجموعات الجزئية التي يمكننا تكوينها:

| عدد العناصر في المجموعة الجزئية | المجموعات الجزئية المترتبة على هذا العدد من العناصر | |
|---|---|---|
| 3 | $\{x, y, z\}$ | (مجموعة جزئية واحدة) |
| 2 | $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$ | (ثلاث مجموعات جزئية) |
| 1 | $\{x\}, \{y\}, \{z\}$ | (ثلاث مجموعات جزئية) |
| 0 | $\emptyset$ | (مجموعة جزئية واحدة) |

لذا، بالنسبة إلى مجموعة مكونة من ثلاثة عناصر، يمكننا تكوين ثماني مجموعات جزئية.

## مثال 2 إيجاد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة

أوجد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة $A =$ {برد، أنفلونزا}.

### الحل

المجموعات الجزئية هي

{برد، أنفلوانزا}
{برد}
{أنفلوانزا}
$\emptyset$

لاحظ أن المجموعة المكونة من عنصرين لها أربع مجموعات جزئية.

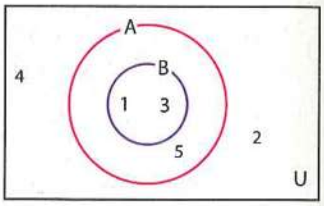
## جرّب هذا 2

أوجد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة $B =$ {الهواتف، الحواسب، الأجهزة اللوحية}.

للإشارة إلى أن مجموعة ما ليست مجموعة جزئية من مجموعة أخرى، يُستخدم الرمز $\not\subseteq$. على سبيل المثال، $\{1, 3\} \not\subseteq \{0, 3, 5, 7\}$ حيث إن $1 \notin \{0, 3, 5, 7\}$.

من بين المجموعات الجزئية الأربعة في المثال 2، توجد مجموعة واحدة فقط تساوي المجموعة الأصلية. سنسمي المجموعات الثلاث المتبقية *مجموعات جزئية فعلية* للمجموعة $A$. يظهر مخطط فِن *Venn* لمجموعة جزئية فعلية في الشكل 4. في هذه الحالة، $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{1, 3\}$.

إذا كانت المجموعة $A$ مجموعة جزئية للمجموعة $B$ وليست مساوية للمجموعة $B$، فإننا نسمي $A$ **مجموعة جزئية فعلية** للمجموعة $B$، ونكتب $A \subset B$. أي إن $A \subseteq B$ و $A \neq B$.



**الشكل 4** $B \subset A$

## مثال 3 إيجاد المجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة

جـد كافة المجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة {التسويق، اللغة الإنجليزية، علم النفس}

### الحل

{التسويق، اللغة الإنجليزية} {التسويق، علم النفس} {اللغة الإنجليزية، علم النفس}
{التسويق} {اللغة الإنجليزية} {علم النفس}
$\emptyset$

## جرّب هذا 3

جـد كافة المجموعات الجزئية الفعلية من المجموعة {ربيع، صيف، خريف، شتاء}

2. إيجاد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة

يُستخدم الرمز $\not\subset$ للإشارة إلى أن المجموعة ليست مجموعة جزئية فعلية. على سبيل المثال، $\{1, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$، لكن $\{1, 3, 5\} \not\subset \{1, 3, 5\}$.

## مثال 4 فهم رمز المجموعات الجزئية

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) $\{1, 3, 5\} \subseteq \{1, 3, 5, 7\}$
(b) $\{a, b\} \subset \{a, b\}$
(c) $\{x \mid x \in E$ و $x > 10\} \subset N$
(d) $\{r, s, t\} \not\subset \{t, s, r\}$
(e) {جبل حفيت، جبل جيس} لا تنتمي إلى مجموعة جبال الإمارات العربية المتحدة
(f) $\emptyset \subset \{5, 10, 15\}$
(g) $\{u, v, w, x\} \subseteq \{x, w, u\}$
(h) $\{0\} \subseteq \emptyset$

**ملاحظة رياضية**

يستخدم البعض الرمز $\supseteq$ عند القراءة من اليمين إلى اليسار.

**ملاحظة رياضية**

من المهم عدم الخلط بين مفهوم المجموعات الجزئية ومفهوم العناصر. على سبيل المثال، تُعد العبارة $6 \in \{2, 4, 6\}$ صائبة لأن 6 أحد عناصر المجموعة $\{2, 4, 6\}$. لكن العبارة $\{6\} \in \{2, 4, 6\}$ خاطئة لأنها تفيد بأن المجموعة التي تحتوي على العنصر 6 هي أحد عناصر المجموعة التي تحتوي على العناصر 2 و4 و6. لكن من الصواب أن نقول إن $\{6\} \subseteq \{2, 4, 6\}$ أو إن $\{6\} \subset \{2, 4, 6\}$.

**الحل**

(a) كل من 1 و3 و5 في المجموعة الثانية، ومن ثم تكون $\{1, 3, 5\}$ مجموعة جزئية للمجموعة $\{1, 3, 5, 7\}$. العبارة صائبة.

(b) حتى بالرغم من أن $\{a, b\}$ مجموعة جزئية من $\{a, b\}$، فإنها ليست مجموعة جزئية فعلية، ومن ثم تكون العبارة خاطئة.

(c) كل عنصر في المجموعة الأولى عدد طبيعي، لكن ليست كل الأعداد الطبيعية مشمولة في المجموعة، ومن ثم تكون هذه المجموعة مجموعة جزئية فعلية من مجموعة الأعداد الطبيعية. العبارة صائبة.

(d) المجموعتان متطابقتان، ومن ثم فإن $\{r, s, t\}$ ليست مجموعة جزئية فعلية من $\{t, s, r\}$. العبارة صائبة.

(e) إن كلًا من جبل حفيت وجبل جيس من جبال الإمارات، ومن ثم تكون المجموعة {جبل حفيت، جبل جيس} مجموعة جزئية من جبال الإمارات. العبارة خاطئة.

(f) صائبة: المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية فعلية من كل مجموعة باستثناء نفسها.

(g) خاطئة: v هو أحد عناصر المجموعة $\{u, v, w, x\}$ لكنه ليس ضمن $\{x, w, u\}$.

(h) المجموعة التي في اليسار تحتوي على عنصر واحد، 0. المجموعة الخالية لا تتضمن أي عناصر، ومن ثم، تكون العبارة خاطئة.

## جرّب هذا 4

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) $\{8\}$ محتواة في $\{x | x$ عدد طبيعي زوجي$\}$

(b) $\{6\} \subseteq \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

(c) $\{2, 3\} \subseteq \{x | x \in N\}$

(d) $\{a, b, c\}$ مجموعة جزئية فعلية من {الحروف الأبجدية للغة الإنجليزية}

(e) $\emptyset \in \{x, y, z\}$

(f) $\emptyset$ محتواة في {أحمر، أصفر، أزرق}

(g) $\{100, 200, 300, 400\} \subset \{200, 300, 400\}$

(h) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

3. استخدام رمز المجموعة الجزئية.

المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد لها مجموعتان جزئيتان – هي نفسها والمجموعة الخالية. لقد رأينا أنه إذا كانت المجموعة تتضمن عنصرين، فستوجد أربع مجموعات جزئية، وإذا كانت المجموعة تتضمن ثلاثة عناصر، فستوجد ثماني مجموعات جزئية.

| عدد العناصر | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| عدد المجموعات الجزئية | 1 | 2 | 4 | 8 |

**ملاحظة رياضية**

في التمرين 110، رأينا نهجًا جديدًا لتطوير صيغة عدد المجموعات الجزئية. فهو يستخدم التبرير الاستنتاجي وليس التبرير الاستقرائي.

ليس من الصعب أن تلاحظ أن عدد المجموعات الجزئية يتضاعف كل مرة تضيف فيها عنصرًا واحدًا إلى المجموعة الأصلية. ولا يستغرق الأمر سوى قليل من التفكير لملاحظة أن في كل حالة، حتى الآن على الأقل، عدد المجموعات الجزئية يساوي 2 مرفوعة إلى أس بقيمة عدد العناصر. ولذا، فقد نستخدم التبرير الاستقرائي لتخمين أن عدد المجموعات الجزئية لأي مجموعة يتبع هذا النمط نفسه، وإذا قمنا بذلك، فسنكون على صواب. كما أن عدد المجموعات الجزئية الفعلية يكون أقل بواحد دائمًا، ومن ثم سنحصل على الصيغة التالية:

### عدد المجموعات الجزئية للمجموعة المنتهية

إذا كانت المجموعة المنتهية تحتوي على عدد $n$ من العناصر، فإنها تضم $2^n$ من المجموعات الجزئية و $2^n - 1$ من المجموعات الجزئية الفعلية.

## مثال 5 إيجاد عدد المجموعات الجزئية للمجموعة

(a) جـد عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة {أبيض، أزرق، أصفر، أحمر، أخضر، أسود}

(b) اشرح لماذا يقل عدد المجموعات الجزئية الفعلية لمجموعة ما دائمًا بواحد عن إجمالي عدد المجموعات الجزئية.

**الحل**

(a) تحتوي المجموعة على $n = 6$ عناصر، لذا يوجد $2^n$، أو $2^6 = 64$، مجموعة جزئية. من بينها، توجد $2^n - 1$، أو 63، مجموعة جزئية فعلية. (تذكر أن $2^6$ تعني $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$، وهو ما يساوي 64.)

(b) عند إيجاد المجموعات الجزيئية الفعلية، يجرى استثناء مجموعة جزئية واحدة فقط من قائمة كافة المجموعات الجزئية: المجموعة الأصلية نفسها. ولذا توجد دائمًا مجموعة جزئية فعلية واحدة أقل من إجمالي عدد المجموعات الجزئية.

## جرّب هذا 5

أوجد عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق}.

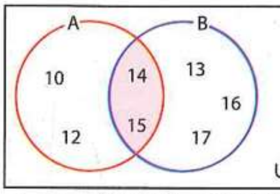
4. إيجاد عدد المجموعات الجزئية للمجموعة

## تقاطع المجموعات واتحادها

كنا قد أشرنا في بداية هذا الدرس أنك قد تنتمي إلى كلتا مجموعتَي الطلاب الذين يعيشون قريبًا من حرم المدرسة والطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة مشيًا. سنحدد الأشياء المشتركة بين مجموعتَين أو أكثر باستخدام مصطلح *التقاطع*.

و**تقاطع** المجموعتَين $A$ و$B$، ورمزه $A \cap B$، هو مجموعة العناصر الموجودة في كل من المجموعتَين. وبالرموز: $A \cap B = \{x | x \in A$ و $x \in B\}$.

على سبيل المثال، إذا كانت $A = \{10, 12, 14, 15\}$ و$B = \{13, 14, 15, 16, 17\}$، فإن تقاطع $A \cap B = \{14, 15\}$، لأن 14 و15 هما العنصران الوحيدان المشتركان بين المجموعتَين. يظهر مخطط فِن *Venn* تقاطع $A \cap B$ في الشكل 5. لاحظ أن عناصر المجموعة $A$ توجد داخل الدائرة الخاصة بالمجموعة $A$ وأن عناصر المجموعة $B$ توجد داخل الدائرة الخاصة بالمجموعة $B$. أما عنصرا التقاطع فيوجدان في الجزء الذي تتداخل فيه الدائرتان؛ $A \cap B$ هو الجزء المظلل.




**الشكل 5** $A \cap B = \{14, 15\}$

يُعد التقاطع مثالًا لإحدى **العمليات على المجموعات**—قاعدة لدمج مجموعتَين أو أكثر لتكوين مجموعة جديدة. يتكون تقاطع ثلاث مجموعات أو أكثر من مجموعة العناصر التي توجد في كل مجموعة لوحدها. لاحظ أن حرف العطف **و** يُستخدم أحيانًا للتعبير عن التقاطع؛ $A \cap B$هو مجموعة العناصر التي في $A$ و $B$.

### مثال 6 إيجاد التقاطعات

يجرى تقييم ثلاثة أدوية تجريبية من حيث السلامة. ولكل منها آثار جانبية رصدها 1% على الأقل من الأشخاص الذين جربوا الدواء. وهذه تجربة عمياء، ولذا سيُرمز إلى الأدوية باستخدام الرموز $A$ و$B$ و$C$. فيما يلي سرد للآثار الجانبية لكل منها.

$A$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين}
$B$ = {زيادة الوزن، غثيان، عصبية، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم}
$C$ = {جفاف الفم، غثيان، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}

جــد كل من المجموعات المطلوبة الآتية:

(a) $A \cap B$ (b) $B \cap C$ (c) $A \cap B \cap C$

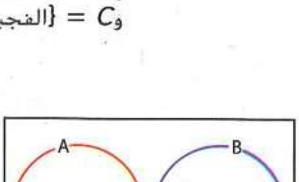
**الحل**

(a) ثمة أثران جانبيّان مذكوران لكل من $A$ و$B$: الغثيان والعصبية. إذن $A \cap B$ = {غثيان، عصبية}.
(b) توجد ثلاثة آثار جانبية مشتركة بين العقارين $B$ و$C$: الغثيان والرؤية المشوشة والحمى. إذن $B \cap C$ = {غثيان، رؤية مشوشة، حمى}.
(c) يشير هذا المثال إلى أن إيجاد تقاطع أكثر من مجموعتَين يبدو منطقيًا تمامًا؛ لقد أوجدت للتو العناصر في كل مجموعة. في هذه الحالة، يكون ثمة أثر جانبي واحد مذكور لكافة العقاقير الثلاثة: الغثيان. إذن $A \cap B \cap C$ = {غثيان}.

### جرّب هذا 6

إذا كانت $A$ = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان} و$B$ = {دبا الحصن، رأس الخيمة، دبي، خورفكان} و$C$ = {الفجيرة رأس الخيمة أبو ظبي}، فأوجد $A \cap B$ و$B \cap C$ و$A \cap B \cap C$.

عندما يكون تقاطع مجموعتَين عبارة عن المجموعة الخالية، تُسمى المجموعات **منفصلة**. على سبيل المثال، نجد أن مجموعة طلاب الصف العاشر ومجموعة طلاب الحادي عشر منفصلتان، حيث لا يمكن أن يكون الطالب مشترك بين المجموعتَين. ويظهر مخطط فِن *Venn* الخاص بالمجموعتَين المنفصلتَين $A$ و$B$ في الشكل 6. إذا لم تتضمن المجموعتان أي عناصر مشتركة، فلن تتقاطع الدائرتان اللتان تمثلهما على الإطلاق.



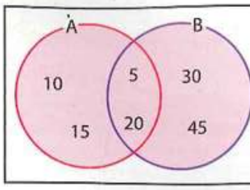

**الشكل 6** $A \cap B = \emptyset$

ثمة طريقة أخرى لدمج مجموعتَين لتكوين مجموعة جديدة تُسمى *الاتحاد*.

و**اتحاد** المجموعتَين $A$ و $B$، ورمزه $A \cup B$، هو مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة $A$ **أو** في المجموعة $B$ (أو كلتيهما). وبالرموز:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

على سبيل المثال، إذا كانت $A = \{5, 10, 15, 20\}$ و$B = \{5, 20, 30, 45\}$، فإن اتحاد $A \cup B = \{5, 10, 15, 20, 30, 45\}$. وحتى بالرغم من وجود 5 و20 في كلتا المجموعتَين، فإننا نذكرهما مرة واحدة فقط في الاتحاد. يظهر مخطط فِن *Venn* لاتحاد $A \cup B$ في الشكل 7. والمجموعة $A \cup B$ هي المنطقة المظللة والتي تتكون من كافة العناصر في كلتا المجموعتَين.




**الشكل 7** $A \cup B$

## مثال 7 إيجاد الاتحادات

بالنسبة إلى المجموعتَين اللتَين في المثال 6، أوجد كلًا مما يلي، ثم صِف ما تمثله كل مجموعة لفظيًا.

(a) $A \cup B$
(b) $A \cup C$
(c) $A \cup B \cup C$

### الحل

لإيجاد الاتحاد، ما عليك سوى تكوين قائمة بكافة العناصر من كلتا المجموعتَين دون كتابة التكرارات.

(a) $A \cup B$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم}. هذه مجموعة الآثار الجانبية التي رصدها أكثر من 1% من الأشخاص الذين جربوا الدواء $A$ أو $B$.

(b) $A \cup C$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}. هذه مجموعة الآثار الجانبية التي رصدها أكثر من 1% من الأشخاص الذين جربوا الدواء $A$ أو $C$.

(c) $A \cup B \cup C$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما}. هذه مجموعة الآثار الجانبية التي رصدها أكثر من 1% من الأشخاص الذين جربوا أيًا من الأدوية الثلاثة.

## جرّب هذا 7

بالنسبة إلى المجموعات التي في جرّب هذا 6، جــد $A \cup B$ و $B \cup C$ و $A \cup B \cup C$.

ماذا عن العمليات التي تتضمن أكثر من مجموعتَين وأكثر من عملية واحدة؟ وكما هو الحال بالنسبة إلى العمليات التي تتضمن الأعداد، فإننا نستخدم الأقواس للإشارة إلى ترتيب العمليات. ويتضح ذلك في المثال 8.

## مثال 8 إجراء العمليات على المجموعات

استخدم المجموعات في المثال 6 مرة أخرى، وجــد كل مجموعة مطلوبة واكتب الوصف اللفظي لما تمثله كل مجموعة.

(a) $(A \cup B) \cap C$
(b) $A \cap (B \cup C)$
(c) $(A \cap B) \cup C$

### الحل

يتمثل المفتاح في إجراء العملية التي بين القوسين أولًا.

(a) أولًا، نجد $A \cup B$، هذه هي المجموعة التي وجدناها في الجزء (a) من المثال 7. الآن، نجد العناصر المشتركة بين هذه المجموعة والمجموعة $C$: $(A \cup B) \cap C$ = {جفاف الفم، غثيان، رؤية مشوشة، حمى}. هذه هي مجموعة الآثار الجانبية المشتركة بين العلاج $C$ وأي من $A$ أو $B$ (أو كليهما).

(b) $A \cap (B \cup C)$ = {غثيان، جفاف الفم، عصبية}. هذه هي مجموعة الآثار الجانبية المشتركة بين العلاج $A$ وأي من $B$ أو $C$ (أو كليهما).

(c) $(A \cap B) \cup C$ = {غثيان، عصبية، جفاف الفم، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}. هذه هي مجموعة الآثار الجانبية المشتركة التي رصدها مستخدمو العلاج $C$ أو كل من مستخدمي $A$ ومستخدمي $B$.

## جرّب هذا 8

بالنسبة إلى المجموعات التي في جرّب هذا 6، جــــد $A \cup (B \cap C)$ و $(A \cap B) \cup C$ و $A \cap (B \cup C)$.

## تنبيه

عند جمع الاتحاد والتقاطع مع المتممات كما سنفعل في المثال 9 ، يجب أن نكون حذرين للغاية. انتبه بشكل خاص إلى الأقواس وما إذا كان رمز المتممة داخل الأقواس أم خارجها.

### ملاحظة رياضية

لا تنسَ أهمية المجموعة الشاملة عند إيجاد المتممات: متممة المجموعة $A$ هي جميع العناصر الموجودة في *المجموعة الشاملة* وليست في المجموعة $A$، وليست كل العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة وفي المجموعة $A$.

### مثال 9 إجراء العمليات على المجموعات

بالرجوع إلى مجموعات الآثار الجانبية، تذكَّر أنها رُصدت من قبل 1% على الأقل من المستخدمين. فيما يلي المجموعة الشاملة لكافة الآثار الجانبية التي رصدها أي من مستخدمي الأدوية الثلاثة. استخدمها لإيجاد المجموعات التالية.

$U$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.

(a) $A' \cap C'$ (b) $(A \cap B)' \cap C$ (c) $B' \cup (A \cap C')$

#### الحل

(a) نوجد أولًا $A'$، والتي تضم كافة العناصر التي في المجموعة الشاملة وليست في المجموعة $A$:
$A'$ = {زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.
ثم نوجد $C'$: $C'$ = {تعرق ليلي، عصبية، تورم القدمين، زيادة الوزن، حمى، صعوبة في النوم، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.
الآن يكون $A' \cap C'$ هي العناصر المشتركة بين $A'$ و$C'$: $A' \cap C'$= {زيادة الوزن، صعوبة في النوم، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.

(b) يشير القوسان إلى أننا يلزمنا إيجاد $A \cap B$ أولًا: $A \cap B$ = {غثيان، عصبية}. ثم نوجد المتممة:
$(A \cap B)'$ = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}. وعناصر هذه المجموعة والموجودة كذلك في المجموعة $C$ هي ما نبحث عنه. أي أن $(A \cap B)' \cap C$ = {جفاف الفم، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}.

(c) نجد أولًا $A \cap C'$: $C'$= {تعرق ليلي، عصبية، تورم القدمين، زيادة الوزن، حمى، صعوبة في النوم، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}، ومن ثم، فإن $A \cap C'$= {تعرق ليلي، عصبية، تورم القدمين}.
ثم نلاحظ أن $B'$ = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.
إن الاتحاد الذي نبحث عنه هو كافة العناصر التي في $B'$ إلى جانب العناصر التي في $A \cap C'$ والتي لم تدرج بالفعل في $B'$:
$B' \cup (A \cap C')$ = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة، عصبية}.

### جرّب هذا 9

إن المجموعة الشاملة للمجموعات التي في جرّب هذا 6 هي$U$ = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، رأس الخيمة، الفجيرة، أبو ظبي، جبل علي، حتا}. جـــد كل مجموعة.

(a) $C'$ (b) $(A \cup B)'$ (c) $A' \cap C'$ (d) $(A \cup B) \cap C'$

يشيع استخدام اتحاد المجموعات وتقاطعها في الحياة اليومية - لكن ربما لم تفكر فقط في هذا الأمر بهذه الطريقة. فمثلًا، يشكل تقاطع مجموعة مواطني الولايات المتحدة الذين تزيد أعمارهم عن 17 ومجموعة مواطني الولايات المتحدة غير المدانين إجراميًّا مجموعة المواطنين المؤهلين للتصويت في الانتخابات القومية. يكوّن اتحاد مجموعة والديّ أمك ومجموعة والديّ أبيك مجموعة أجدادك.

## طرح المجموعات

تُسمى العملية الثالثة التي سندرُسها على المجموعات *الفرق* بين المجموعات. وسنسميها كذلك *طرح المجموعات* كما سنستخدم علامة الطرح لتمثيلها.

إن **الفرق** بين المجموعة $A$ والمجموعة $B$ هي مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة $A$ *وليست* موجودة في المجموعة $B$. وبالرموز: $A - B = \{x | x \in A$ و $x \notin B\}$.

## مثال 10 إيجاد الفرق بين مجموعتَين

سنستخدم مرة أخرى المجموعات في المثال 6. ينبغي لك أن تكون على معرفة جيدة بها الآن.
جـــد كل مجموعة.

(a) $A - B$ (b) $B - C$ (c) $(A - B) - C$

### الحل

(a) نبدأ بعناصر المجموعة $A$، ثم نحذف كل عنصر في $B$ موجود كذلك في $A$. العنصران المشتركان هما الغثيان والعصبية، ومن ثم تكون $A - B =$ {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين}.

(b) في هذه المرة، سنبدأ بالمجموعة $B$، ثم نحذف الأشياء التي في $C$ وموجودة كذلك في $B$. العناصر المشتركة هي الغثيان والرؤية المشوشة والحمى، ومن ثم تكون $B - C =$ {زيادة الوزن، عصبية، صعوبة في النوم}.

(c) إننا نعرف بالفعل أن $A - B =$ {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين}، والآن سنحتاج إلى إيجاد أي عناصر موجودة كذلك في المجموعة $C$ ثم نحذفها. لا يوجد سوى جفاف الفم في المجموعة $C$، إذن $(A - B) - C =$ {تعرق ليلي، تورم القدمين}.

### ملاحظة رياضية

يمكن كتابة بعض العمليات بدلالة عمليات أخرى. على سبيل المثال، $5 - 3$ تكون كذلك $5 + (-3)$. هل يمكنك التفكير في طريقة لكتابة $A - B$ باستخدام التقاطع والمتممة؟ قد يكون رسم مخطط فِن *Venn* مفيدًا.

## جرّب هذا 10

بالنسبة إلى المجموعات التي في جرّب هذا 6، جـــد كل مجموعة.

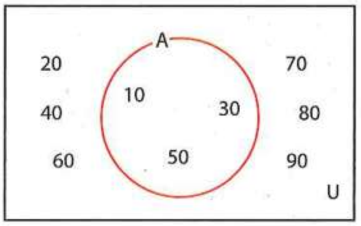
(a) $A - B$ (b) $B - C$ (c) $(B - C) - A$

5. إيجاد التقاطعات والاتحادات والفروق بين المجموعات.

لقد استخدمنا إلى الآن مخططات فِن *Venn* كطريقة لتصوير مجموعات معينة. في الدرسَين التاليَين سندرس كيف يمكن استخدام هذه المخططات لدراسة المجموعات بتعمق أكبر في مجموعة متنوعة من الحالات المنطبقة.

## إجابات جرّب هذا

1 (a) $A' = \{90, 80, 70, 60, 40, 20\}$




(b) المجموعة المتممة للمجموعة الخالية هي المجموعة الشاملة.

2 {الهواتف، الحواسب، الأجهزة اللوحية}، {الهواتف، الحواسب}، {الهواتف، الأجهزة اللوحية}، {الحواسب، الأجهزة اللوحية}، {الهواتف}، {الحواسب}، {الأجهزة اللوحية}، $\emptyset$

3 {الربيع، الصيف، الخريف، الشتاء}، {الربيع، الصيف، الخريف}، {الربيع، الصيف، الشتاء}، {الربيع، الخريف، الشتاء}، {الصيف، الخريف، الشتاء}، {الربيع، الصيف}، {الربيع، الخريف}، {الربيع، الشتاء}، {الصيف، الخريف}، {الصيف، الشتاء}، {الخريف، الشتاء}، {الربيع}، {الصيف}، {الخريف}، {الشتاء}، $\emptyset$

4 (a) صائبة (c) صائبة (e) خاطئة (g) خاطئة
(b) خاطئة (d) صائبة (f) صائبة (h) خاطئة

5 المجموعات الجزئية: $2^8 = 256$؛ المجموعات الجزئية الفعلية: 255

6 (a) $A \cap B =$ {دبي، خورفكان}؛
(b) $B \cap C =$ {رأس الخيمة}؛ $A \cap B \cap C = \emptyset$

7 (a) $A \cup B =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، رأس الخيمة}
(b) $A \cup C =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، الفجيرة، أبو ظبي}
(c) $A \cup B \cup C =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، رأس الخيمة، الفجيرة، أبو ظبي}

8 (a) $A \cup (B \cap C) =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، رأس الخيمة}
(b) $(A \cap B) \cup C =$ {دبي، خورفكان، الفجيرة، رأس الخيمة، أبو ظبي}
(c) $A \cap (B \cup C) =$ {دبي، خورفكان}

9 (a) $C' =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، جبل علي، حتا}
(b) $(A \cup B)' =$ {الفجيرة، أبو ظبي، جبل علي، حتا}
(c) $A' \cap C' =$ {دبا الحصن، جبل علي، حتا}
(d) $(A \cup B) \cap C' =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن}

10 (a) $A - B =$ {الشارقة، عجمان، أم القيوين}
(b) $B - C =$ {دبا الحصن، دبي، خورفكان}
(c) $(B - C) - A =$ {دبا الحصن}

# 5-2 مجموعة التمارين

## تمارين كتابية

1. ما المقصود بالمجموعة الجزئية؟
2. اشرح الفرق بين المجموعة الجزئية والمجموعة الجزئية الفعلية.
3. اشرح الفرق بين المجموعة الجزئية وعنصر المجموعة.
4. اشرح لماذا تمثل المجموعة الخالية مجموعة جزئية لنفسها، لكنها ليست مجموعة جزئية فعلية.
5. اشرح الفرق بين اتحاد مجموعتين وتقاطعهما.
6. متى يقال إن المجموعتين منفصلتان؟
7. ما المقصود بالمجموعة الشاملة؟
8. ما المقصود بمتممة مجموعة؟
9. اكتب مثالًا من الحياة اليومية يُمثل اتحاد المجموعات واشرح لماذا يمثل اتحادًا. ثم قم بالشيء نفسه مع التقاطع.
10. اكتب مثالًا من الحياة اليومية يُمثل الفرق بين المجموعات واشرح لماذا يمثل فرقًا.

## تمارين حسابية

*بالنسبة إلى التمارين 11-14، لتكن* $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$، و $A = \{5, 7, 11, 13\}$ و $B = \{2\}$ و$C = \{13, 17, 19\}$، و$D = \{2, 3, 5\}$. *جـد كل مجموعة.*

11. $A'$
12. $B'$
13. $C'$
14. $D'$

15. إذا كانت $U$ = مجموعة الأعداد الطبيعية و$A = \{4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$، فجـد $A'$.
16. إذا كانت $U$ = مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية و$B = \{13, 15, 17, 19, 21, 23, \ldots\}$، فجـد $B'$.

*بالنسبة إلى التمارين 17-24، جـد جميع المجموعات الجزئية وجميع المجموعات الجزئية الفعلية لكل مجموعة.*

17. {كرة السلة، كرة القدم، والكرة اللينة}
18. {الإلقاء، الصحافة، الخطابة}
19. {الراديو، التلفاز}
20. {إلكتروني، ورقي}
21. $\emptyset$
22. $\{\ \}$
23. {الحمى، الارتجاف، الغثيان، الصداع}
24. {نوبات مرضية، تنمل، شلل، ألم}

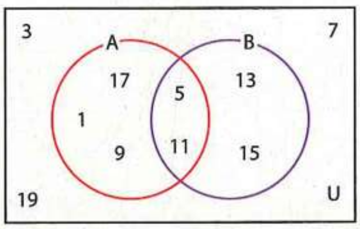
*بالنسبة إلى التمارين 25-34، حدّد ما إذا كانت كل عبارة صائبة أم خاطئة.*

25. $\{3\} \subseteq \{5, 3, 1\}$
26. $\{a, b, c\} \subset \{c, b, a\}$
27. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{123\}$
28. $\emptyset \subset \emptyset$
29. $\emptyset \in \{\ \}$
30. $\{x|x \in E \text{ و} x > 100\} \subset \{x|x \in N \text{ و} x > 52\}$
31. $\{3\} \in \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
32. $\{x|x \in N \text{ و} x > 10\} \subseteq \{x|x \in N \text{ و} x \geq 10\}$
33. $\emptyset \subset \{a, b, c\}$
34. $\{7, 11, 13, 17\} \subseteq \{17, 13, 11\}$

*بالنسبة إلى التمارين 35-40، جـد عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية التي تتضمنها كل مجموعة. لا تسرد المجموعات الجزئية.*

35. $\{25, 75, 50\}$
36. $\{a, b, c, d, \ldots, z\}$
37. $\emptyset$
38. $\{0\}$
39. $\{x, y\}$
40. $\{10, 8, 6, 4, 2, \ldots, 30\}$

*بالنسبة إلى التمارين 41-50، استخدم مخطط فن Venn لإيجاد العناصر في كل مجموعة.*




41. $U$
42. $A$
43. $B$
44. $A \cap B$
45. $A \cup B$
46. $A'$
47. $B'$
48. $(A \cup B)'$
49. $(A \cap B)'$
50. $A \cap B'$

*بالنسبة إلى التمارين 51-60، لتكن*

$U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
$A = \{14, 15, 16, 17\}$
$B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$
$C = \{12, 14, 15, 19, 20\}$

*جـد كل مجموعة.*

51. $A \cup C$
52. $A \cap B$
53. $A'$
54. $(A \cap B) \cup C$
55. $A' \cap (B \cup C)$
56. $(A \cap B) \cap C$
57. $(A \cup B)' \cap C$
58. $A \cap B'$
59. $(B \cup C) \cap A'$
60. $(A' \cup B)' \cup C'$

*بالنسبة إلى التمارين 61-70، لتكن*

$U = \{x|x \in N \text{ و } x < 25\}$
$W = \{x|x \in N \text{ و } 5 < x < 15\}$
$X = \{x|x \in$ الأعداد الطبيعية الزوجية التي تقل عن 10$\}$
$Y = \{x|x \in N \text{ و } 20 < x < 25\}$
$Z = \{x|x \in$ مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تقل عن 13$\}$

*جـد كل مجموعة.*

61. $W \cap Y$
62. $X \cup Z$
63. $W \cup X$
64. $(X \cap Y) \cap Z$

الدرس 5-2

# مجموعة التمارين يُتبع

65. $W \cap X$
66. $(Y \cup Z)'$
67. $(X \cup Y) \cap Z$
68. $(Z \cap Y) \cup W$
69. $W' \cap X'$
70. $(Z \cup X)' \cap Y$

*بالنسبة إلى التمارين 71-74، لتكن*

$U = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
$B = \{9, 18, 27, 36, \ldots\}$
$C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

*جــد كل مجموعة.*

71. $A \cap B$
72. $A' \cap C$
73. $A \cap (B \cup C')$
74. $A \cup B$

*بالنسبة إلى التمارين 75-80، لتكن*

$U = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$
$A = \{p, q, r, s, t\}$
$B = \{r, s, t, u, v\}$
$C = \{p, r, t, v\}$

*جــد كل مجموعة.*

75. $C - B$
76. $A - C$
77. $B - C$
78. $B - A$
79. $B \cap C'$
80. $C \cap A'$

*بالنسبة إلى التمارين 81-84، بفرض أن*

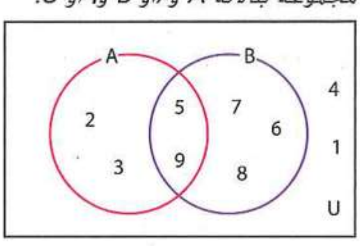
$D = \{11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$
$M = \{x | x \in E$ و $x > 10\}$
$T = \{x | x \in N$ و $x < 100\} \cup \{x | x \in O$ و $x > 100\}$

*جــد كل مجموعة.*

81. $D - M$
82. $T - D$
83. $(D - M) - T$
84. $(T - D) - M$

*بالنسبة إلى التمارين 85-88، استخدم مخطط فِن Venn لكتابة كل مجموعة بدلالة A و/أو B و/ أو U.*

85. $\{1, 2, 3, 4\}$
86. $\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$
87. $\{2, 3, 6, 7, 8\}$
88. $\{1, 4\}$




## التطبيقات في عالمنا

89. يمكن للطالب الحصول على جهاز لوحي وهاتف ذكي وكمبيوتر محمول أثناء قضاء بعض الوقت في الحرم الجامعي بين الصفوف. اسرد جميع مجموعات خيارات تمثيل المعلومات المختلفة التي يمكن للطالب اختيارها، مع وضع جميع هذه التقنيات أو بعضها أو لا شيء منها في الاعتبار.
90. إذا تم توزيع خمس بطاقات لعب على شخص، ولديه فرصة تجاهل أيّ عدد يتضمن 0، فكم عدد الخيارات المتاحة لهذا الشخص؟
91. تستطيع إحدى طالبات الفرقة الأولى في الكلية اختيار أحد الصفوف التالية أو بعضها أو جميعها لنصف السنة الأول: صف اللغة العربية وصف الرياضيات وصف اللغة الأجنبية وصف العلوم وصف الفلسفة وصف التربية البدنية وصف التاريخ. كم عدد الاحتمالات المختلفة المتوفرة لديها لجدولها الجديد؟
92. منذ إعادة تشكيل اتحاد الطلاب، كان ثمة خيارات محدودة من الأطعمة والمشروبات التي يمكن للطالب شراؤها كوجبة خفيفة بين الصفوف الدراسية. فيمكن للطلاب عدم اختيار أي من هذه العناصر أو اختيار بعضها أو جميعها: البيتزا والبطاطس المقلية والمخبوزات الناعمة الكبيرة والمياه الغازية والكولا عديمة السكر والعصائر. كم عدد الاختيارات المختلفة التي يمكن إجراؤها؟
93. تشتري رنا كمبيوتر محمولًا جديدًا للمدرسة ويمكنها عدم اختيار أي شيء من خيارات الأجهزة الطرفية التالية أو اختيار بعضها أو جميعها: ماوس ليزر أو ناسخ الأقراص الرقمية أو كاميرا ويب أو ذاكرة متنقلة. كم عدد اختيارات الأجهزة الطرفية المختلفة الممكنة للكمبيوتر المحمول الخاص بها؟
94. لدمج تمارين الأيروبيك في برنامج التمرين الخاص بها، يمكن لشيماء اختيار إحدى هذه الآلات أو بعضها أو جميعها: جهاز السير والدراجة وجهاز ستير ستيبر. اسرد جميع الاحتمالات لاختيارات تمارين الأيروبيك.
95. إعلان الوظائف الشاغرة التالي يبحث عن شخص يقع ضمن تقاطع ثلاث مجموعات. اذكر تلك المجموعات الثلاث؟

*اكتب وصفًا لفظيًا لكل مجموعة.*

96. (a) $B \cup C$ (b) $C \cup D$ (c) $D \cup E$
97. (a) $A'$ (b) $C'$ (c) $E'$
98. (a) $B \cap C$ (b) $A \cap B$ (c) $C \cap B'$
99. (a) $(A \cup B)'$ (b) $(B \cup D)'$ (c) $A - (B \cap C)$

## التفكير الناقد

*إن **الضرب الديكارتي** هو عملية تتم في المجموعة لم ندرسها بعد، عند اقتران عناصر من مجموعتين معًا في مجموعة داخل قوسين، مثل (الأنفلونزا، الارتجاف). نسمي ذلك **زوجًا مرتبًا**. الضرب الديكارتي للمجموعتين A وB، والذي يُرمز له بالرمز $A \times B$، هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة بحيث يكون الإدخال الأول عنصرًا من المجموعة A والإدخال الثاني من المجموعة B. وتستخدم هذه العملية لربط الأشياء المتوافقة مع بعضها بشكل طبيعي، مثل الأمراض والأعراض. على سبيل المثال، إذا كانت A = {برد، أنفلونزا} وB = {حمى، ارتجاف}، فإن $A \times B$ = {(برد، حمى)، (برد، ارتجاف)، (أنفلونزا، حمى)، (أنفلونزا، ارتجاف)}. بالنسبة إلى كل زوج من المجموعات في التمرينين 101 و102، جــد ناتج الضرب المتجهي واكتب وصفًا لفظيًا عن أهميته.*

100. A = {قميص، معطف}،
B = {أخضر، أصفر، أحمر}

101. $A$ = {ناجح، راسب}، $B$ = {ناجح في جميع المواد، ناجح في المواد العملية، ناجح في المواد النظرية}

102. إذا كانت $n(A) = n$ و$n(B) = m$، فما هي $n(A \times B)$؟ اشرح كيف توصلت إلى إجابتك.

103. ما العلاقة بين الضرب الديكارتي والضرب العادي؟

104. هل يمكنك إيجاد مجموعتين اتحادهما وتقاطعهما واحد؟

105. اختر ثلاثة أدوية وابحث عن مورد عبر الإنترنت يذكر الآثار الجانبية المحتملة لكل منها. جـد تقاطع المجموعات.

106. (a) كوّن مجموعتين $A$ و$B$ تتضمن كل منهما بين 4 و8 عناصر بحيث يكون $A \cap B$ غير خالية. جـد كلًا من $n(A)$ و$n(B)$ و$n(A \cup B)$ و$n(A \cap B)$.

(b) كرر الجزء (a) بمجموعتين مختلفتين تمامًا $A$ و$B$.

(c) استخدم نتائج الجزأين (a) و(b) لتكوين تخمين حول صيغة لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد المجموعتين.

107. (a) اكتب المجموعتين $A$ و$B$ بحيث تكون عندهما $n(A \cup B) > n(A \cap B)$.

(b) اكتب المجموعتين $A$ و$B$ بحيث تكون عندهما $n(A \cup B) = n(A \cap B)$.

(c) هل يمكنك كتابة المجموعتين $A$ و$B$ بحيث تكون عندهما $n(A \cup B) < n(A \cap B)$؟ استخدم مخطط فِن Venn لتوضيح السبب وراء إمكانية ذلك أو عدم إمكانيته.

108. فكّر في المجموعتين $A$ و$B$. ماذا يجب أن يحدث ليكون $A \cap B = A$؟ ماذا عن $A \cap B = B$؟

109. بالنسبة إلى أي مجموعتَين$A$ و$B$، ماذا يجب أن يحدث بالنسبة إلى الأمرين الواردين في التمرين 109؟

110. إليك طريقة بديلة لتكوين صيغة لعدد المجموعات الجزئية لمجموعة تتضمن $n$ من العناصر. إذا كانت المجموعة تضم عنصرين، فعند تكوين مجموعة جزئية، سيوجد خياران لكل عنصر؛ إما أن يكون ضمن المجموعة الجزئية أو لا. إذا ضربنا خيارين للعنصر الأول في خيارين للعنصر الثاني، نحصل على أربعة خيارات للمجموعة الجزئية. (هذا يوضح فكرة مهمة تُسمى مبدأ العد الأساسي). قم بتعميم هذه الفكرة لاستنباط الصيغة لإيجاد عدد المجموعات الجزئية.

الدرس
# 5-3 استخدام مخططات فِن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

## أهداف التعلم

1 توضيح عبارات مجموعة تضم مجموعتين باستخدام مخططات فِن Venn.

2 توضيح عبارات مجموعة تضم ثلاث مجموعات باستخدام مخططات فِن Venn.

3 استخدام قوانين دي مورجان.

4 استخدام مخططات فِن Venn لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم لا.

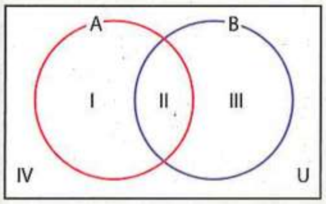
5 استخدام الصيغة لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد المجموعتين.

هل سبق لك أن أردت نشر شيء ما على مواقع التواصل الاجتماعي، ثم قررت ألا تنشره لأنه ربما لم يكن ضمن الأشياء التي تريد أن يراها الجميع؟ إن بعض الناس ليسوا أصدقاءً على وسائل التواصل الاجتماعي إلا مع أقرب أصدقائهم؛ معظم الأشخاص يكونون أصدقاءً لمئات من الأشخاص، بداية من أمهاتهم وحتى مجموعة المعارف العابرين. لدي أنا وصديقي المقرب مجموعة خاصة سرية على أحد مواقع التواصل الاجتماعي لهذا السبب بالتحديد؛ فمجموعة الأشياء التي أشعر بالارتياح للإفصاح عنها لزملاء الدراسة لا تساوي -أو حتى تكافئ- بالتأكيد مجموعة الأشياء التي أشعر بالارتياح للإفصاح عنها لأمي أو صديقي المقرب. ومعظمنا لديه العديد من الدوائر المتميزة للأصدقاء وجهات الاتصال، وعندما تصطدم تلك العوالم، قد تأتي النتائج غير متوقعة، وربما تكون مضحكة عن غير قصد.

وثمة طريقة جيدة للتعامل مع التداخل بين المجموعات المتنوعة تتمثل في استخدام المخططات. وهل يمكنك تخمين نوع المخطط الذي سنختاره لتحقيق ذلك؟ إذا لم تقل "مخطط فِن Venn"، فارجع رجاءً وأعِد قراءة الدرس السابق.

في هذا الدرس، سنطور طريقة لرسم مخططات فِن Venn التي ستساعدنا على توضيح العمليات على المجموعات، وسنبدأ بالمخططات التي تتضمن التفاعلات بين مجموعتَين، كما في الشكل 8. لاحظ أنه توجد أربع مناطق منفصلة في مخطط فِن Venn الذي يوضح المجموعتَين $A$ و$B$. سنريد ترقيم المناطق للمرجعية؛ كما سنستخدم الأرقام الرومانية بحيث لا تتداخل أرقام المناطق مع العناصر التي في المجموعة أو عناصرها الرئيسة.

كما أن الإجراء الذي سنستخدمه لتوضيح عناصر المجموعتين، الموجودتَين في المربع أدناه، تم عرضه في المثالَين 1 و2. أما الآن، فسنشرع في العمل باستخدام مجموعات مجردة تمامًا، لكنها معلقة هناك. وستساعدنا المهارات التي تعلمناها على حل مسائل حقيقية فيما بعد.



الشكل 8

### توضيح عبارة مجموعة باستخدام مخطط فِن Venn

**الخطوة 1** ارسم مخططًا للمجموعات، بالأرقام الرومانية في كل منطقة.

**الخطوة 2** باستخدام تلك الأرقام الرومانية، قم بذكر المناطق التي تصفها كل مجموعة.

**الخطوة 3** جـد مجموعة الأعداد التي توافق المجموعة المعطاة في عبارة المجموعة.

**الخطوة 4** ظلل المنطقة المطابقة لمجموعة الأعداد الموجودة في الخطوة 3.

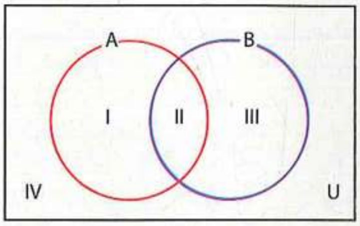
**المنطقة I** تمثل العناصر الموجودة في المجموعة $A$ وغير موجودة في المجموعة $B$.
**المنطقة II** تمثل العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين $A$ و$B$.
**المنطقة III** تمثل العناصر الموجودة في المجموعة $B$ وغير موجودة في المجموعة $A$.
**المنطقة IV** تمثل العناصر في المجموعة الشاملة التي لا توجد في كلتا المجموعتين $A$ و$B$.

## مثال 1 رسم مخطط فِن Venn

ارسم مخطط فِن Venn لتوضيح المجموعة $(A \cup B)'$.

### الحل

**الخطوة 1** ارسم المخطط وقم بتسمية كل منطقة بالأرقام الرومانية.

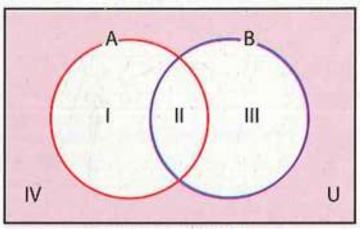



**الخطوة 2** من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$$U = \{I, II, III, IV\}$$
$$A = \{I, II\}$$
$$B = \{II, III\}$$

**الخطوة 3** باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2، جــد $(A \cup B)'$.
أولًا، تقع I وII وIII إما في المجموعة $A$ أو $B$، لذا $A \cup B = \{I, II, III\}$. المجموعة الوحيدة غير الموجودة في $A \cup B$ هي IV، لذا المجموعة المتممة هي $(A \cup B)' = \{IV\}$.

**الخطوة 4** ظلل المنطقة IV لتوضيح $(A \cup B)'$.




## جرّب هذا 1

ارسم مخطط فِن Venn لتوضيح المجموعة $A' \cap B$.

**ملاحظة رياضية**

في أي مسألة يطلب منا توضيح عبارة مجموعة تضم مجموعتين، ستكون الخطوتان 1 و2 نفسهما تمامًا.

## مثال 2 رسم مخطط فِن Venn

ارسم مخطط فِن Venn لتوضيح المجموعة $A \cap B'$.

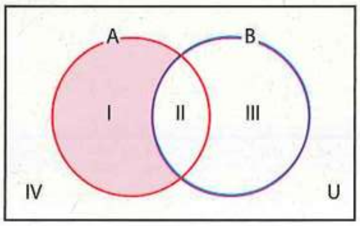
### الحل

**الخطوة 1** ارسم المخطط وقم بتسمية كل منطقة. سيكون هذا هو المخطط نفسه الموجود في الخطوة 1 من المثال 1.

**الخطوة 2** من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$$U = \{I, II, III, IV\}$$
$$A = \{I, II\}$$
$$B = \{II, III\}$$

**الخطوة 3** باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2،
جــد $A \cap B'$.
أولًا، توجد المنطقتان I وIV خارج المجموعة $B$.
لذا $B' = \{I, IV\}$. من بين هاتين المنطقتين،
تقع I كذلك في المجموعة $A$. لذا $A \cap B' = \{I\}$.




**الخطوة 4** ظلل المنطقة I لتوضيح $A \cap B'$.

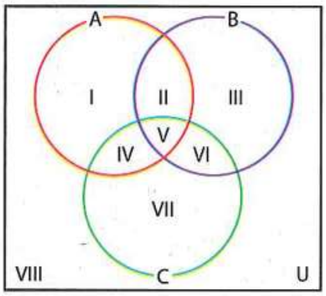
## جرّب هذا 2

ارسم مخطط فِن Venn لتوضيح المجموعة $A' \cup B$.

✓ 1. توضيح عبارات مجموعة تضم مجموعتين باستخدام مخططات فِن Venn.

تُعد مخططات فِن Venn رائعة في فرز المعلومات، وسنرغب في بعض التجارب مع مخططات فِن Venn التي تتضمن ثلاث مجموعات قبل أن ننتقل إلى حل هذه المسائل.

ولحسن الحظ، يمكن استخدام الإجراء الذي استخدمناه مع مجموعتين مع ثلاث مجموعات أيضًا؛ ستحصل فقط على مخطط أكثر تعقيدًا (انظر الشكل 9).




**الشكل 9**

**المنطقة I** تمثل العناصر الموجودة في المجموعة $A$ وغير موجودة في المجموعة $B$ أو المجموعة $C$.
**المنطقة II** تمثل العناصر الموجودة في المجموعة $A$ والمجموعة $B$ وغير موجودة في المجموعة $C$.
**المنطقة III** تمثل العناصر الموجودة في المجموعة $B$ وغير موجودة في المجموعة $A$ أو المجموعة $C$.
**المنطقة IV** تمثل العناصر الموجودة في المجموعتين $A$ و$C$ وغير موجودة في المجموعة $B$.
**المنطقة V** تمثل العناصر الموجودة في المجموعات $A$ و$B$ و$C$.
**المنطقة VI** تمثل العناصر الموجودة في المجموعتين $B$ و$C$ وغير موجودة في المجموعة $A$.
**المنطقة VII** تمثل العناصر الموجودة في المجموعة $C$ وغير موجودة في المجموعة $A$ أو المجموعة $B$.
**المنطقة VIII** تمثل العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة $U$، وغير موجودة في المجموعة $A$ أو $B$ أو $C$.

### مثال 3 رسم مخطط فِن Venn بثلاث مجموعات

ارسم مخطط فِن Venn لتوضيح المجموعة $A \cap (B \cap C)'$.

**الحل**

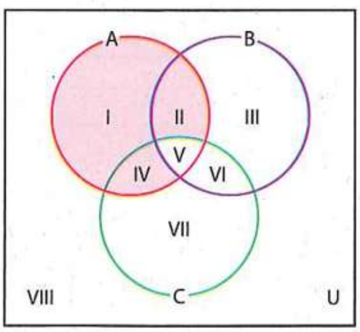
**الخطوة 1** ارسم المخطط وقم بتسميته كما هو موضح في الشكل 9-2.

**الخطوة 2** من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$$U = \{I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII\}$$
$$A = \{I, II, IV, V\}$$
$$B = \{II, III, V, VI\}$$
$$C = \{IV, V, VI, VII\}$$

**الخطوة 3** باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2، جد $A \cap (B \cap C)'$. جد $B \cap C$ أولًا، $B \cap C = \{V, VI\}$. المجموعة المتممة هي $(B \cap C)' = \{I, II, III, IV, VII, VIII\}$. المناطق I وII وIV هي كذلك أجزاء من المجموعة $A$، لذا $A \cap (B \cap C)' = \{I, II, IV\}$.

**الخطوة 4** ظلل المناطق I وII وIV لتوضيح $A \cap (B \cap C)'$.




**ملاحظة رياضية**

عند توضيح مجموعات معقدة مثل $A \cap (B \cap C)'$، لا تنسَ إيجاد المجموعة الموجودة بين القوسين أولًا. هذا هو سبب وجود الأقواس!

## جرّب هذا 3

ارسم مخطط فِن Venn لتوضيح المجموعة $(A \cap B') \cup C$.

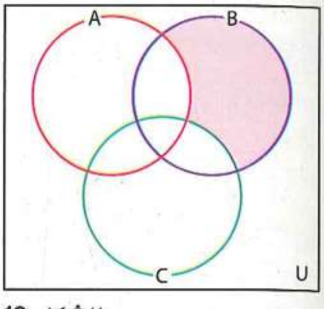
للتعامل مع مخططات فِن *Venn* بصورة أفضل، سيكون من المفيد تحويل العملية، مع البدء بمخطط مظلل ومعرفة المجموعة التي يمثلها، كما في المثال 4.

### مثال 4 إيجاد المجموعة المناظرة لمخطط فِن *Venn*

اكتب المجموعة الموضحة باستخدام مخطط فِن *Venn* في الشكل 10.

**الحل**

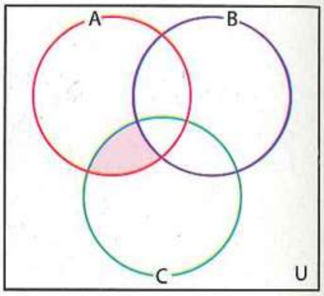
الجزء المظلل موجود بالكامل داخل الدائرة للمجموعة $B$، لذا فهو بالتأكيد مجموعة جزئية من $B$. لكنه لا يتضمن أيّ شيء من المجموعة $A$ أو $C$، لذا يمكننا كتابته إما $B - (A \cup C)$ أو $B \cap (A \cup C)'$.



**الشكل 10**

## جرّب هذا 4

اكتب المجموعة الموضحة باستخدام مخطط فِن *Venn* في الشكل 11.



**الشكل 11**

## قوانين دي مورجان

ثمة صيغتان معروفتان جيدًا تفيدان في تبسيط بعض العمليات على المجموعات. وقد سُميَا بذلك تكريمًا لعالم رياضيات من القرن التاسع عشر يُدعى أوجستن دي مورجان.

سنبدأ أولًا بكتابة الصيغتين وسنوضح كلًا منهما بمثال. وبعد ذلك، سنرى كيف يمكن استخدام مخططات فِن *Venn* لإثبات الصيغتين.

**قوانين دي مورجان**

بالنسبة إلى أي مجموعتين A وB،

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

ينص القانون الأول على أن متممة اتحاد مجموعتين تساوي دائمًا تقاطع متممتي المجموعتين.

2. توضيح عبارات مجموعة تضم ثلاث مجموعات باستخدام مخططات فِن *Venn*.

### مثال 5 استخدام قوانين دي مورجان

إذا كانت $U$ = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية، مؤتة} و $A$ = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري} و $B$ = {اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية}، فجد $(A \cup B)'$ و$A' \cap B'$. ماذا يمكننا ملاحظته بشأن هاتين المجموعتين؟

**الحل**

$A \cup B$ = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية} و $(A \cup B)'$ = {مؤتة}

$A'$ = {نهاوند، القادسية، مؤتة}

$B'$ = {حطين، عين جالوت، مؤتة}

$A' \cap B'$ = {مؤتة}

هاتان المجموعتان متماثلتان، الأمر الذي يتوافق مع أول قوانين دي مورجان.

## جرّب هذا 5

إذا كانت $U$ = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق} و$A$ = {النحاس، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم} و$B$ = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت}، فجـــد $(A \cup B)'$ و$A' \cap B'$.

### معلومات إضافية الحاضر وفِن Venn

تُنسب مخططات فِن *Venn* بوجه عام إلى عالم الرياضيات البريطاني جون فِن، الذي قدمها عام 1880 على النحو الذي نستخدم عليه اليوم. هذا يجعل الأمر يبدو مفهومًا قديمًا إلى حدٍ ما، لكن يمكن أن ترجع جذور الفكرة العامة إلى أبعد من ذلك بكثير. فقد استخدم عالم الرياضيات الكبير ليونهارد أويلر مخططات مشابهة في القرن الثامن عشر ويمكن أن ترجع جذور أشكال أخرى مماثلة إلى القرن الثالث عشر!

بينما كان من الحقيقي بلا ريب أن جون فِن كان أكاديميًا كلاسيكيًا—فقد كان يكتب أو يحاضر في كل من الأخلاق والرياضيات والمنطق ونظرية الاحتمال والفلسفة والميتافيزيقيا والتاريخ في الوقت نفسه—إلا أنه كان يمارس هواية مدهشة إلى حد ما، إنشاء الآلات. وعلى وجه الخصوص، كان معروفًا أكثر ببناء آلة لقذف كرات الكريكيت (وهو ما يشبه القذف في لعبة البيسبول تقريبًا). كانت آلته جيدة جدًا لدرجة أنها حققت في عام 1909 "رمية نظيفة" أمام أحد أفضل لاعبي الكريكيت في ذلك الوقت في أربع مناسبات.

ينص القانون الثاني من قوانين دي مورجان على أن متممة تقاطع مجموعتين تساوي اتحاد متممتي المجموعتين.

### ملاحظة رياضية

في المثالين 5 و6، نبحث في أمثلة محددة، لذلك نستخدم التبرير الاستقرائي لاستنتاج أن قوانين دي مورجان صحيحة على الأرجح. في المثال 7، سنستخدم التبرير الاستنتاجي *لإثباتها*.

### مثال 6 استخدام قوانين دي مورجان

إذا كانت $U$ = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية، مؤتة} و$A$ = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري} و$B$ = {اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية}، فجـــد $(A \cap B)'$ و$A' \cup B'$. ماذا يمكننا ملاحظته بشأن هاتين المجموعتين؟

#### الحل

$A \cap B$ = {اليرموك، ذات الصواري} و $(A \cap B)'$ = {حطين، عين جالوت، نهاوند، القادسية، مؤتة}

$A'$ = {نهاوند، القادسية، مؤتة}

$B'$ = {حطين، عين جالوت، مؤتة}

$A' \cup B'$ = {نهاوند، القادسية، مؤتة، حطين، عين جالوت}

على الرغم من ذكرهما بترتيبات مختلفة (الأمر الذي نعلم أنه غير مهم)، فإن هاتين المجموعتين متماثلتان، الأمر الذي يتوافق مع ثاني قوانين دي مورجان.

3. استخدام قوانين دي مورجان.

## جرّب هذا 6

إذا كانت $U$ = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق} و$A$ = {النحاس، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم} و$B$ = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت}، فجـــد $(A \cap B)'$ و$A' \cup B'$.

الآن وبعد أن عرفنا كيفية عرض المجموعات باستخدام مخططات فِن *Venn*، يمكننا استخدامها لإثبات أن المجموعتين اللتين تبدوان مختلفتين متماثلتان في الواقع. سنوضح في المثال 7 الإجراء عن طريق إثبات قانون دي مورجان الأول. وسنترك القانون الثاني لك لتحاول إثباته.

## مثال 7 استخدام مخططات فِن Venn لتوضيح تساوي المجموعات

استخدم مخططات فِن Venn لتوضيح أن $(A \cup B)' = A' \cap B'$، يثبت أول قوانين دي مورجان.

### الحل

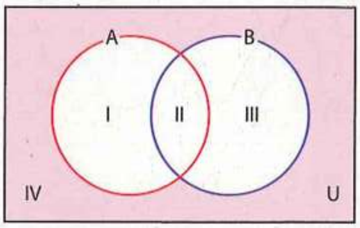
ابدأ برسم مخطط فِن Venn لـ $(A \cup B)'$.

**الخطوة 1** ارسم الشكل (كما هو موضح في الخطوة 4).

**الخطوة 2** المجموعة $U$ تتضمن المناطق I وII وIII وIV. المجموعة $A$ تتضمن المنطقتين I وII، والمجموعة $B$ تتضمن المنطقتين II وIII.

**الخطوة 3** $A \cup B = \{I, II, III\}$، لذا $(A \cup B)' = \{IV\}$.

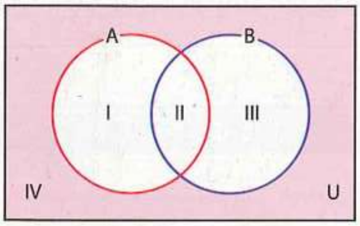
**الخطوة 4** ظلل المنطقة IV لتوضيح $(A \cup B)'$.




ثم ارسم مخطط فِن Venn لـ $A' \cap B'$. الخطوتان 1 و2 مثل الخطوتين أعلاه.

**الخطوة 3** $A' = \{III, IV\}$ و$B' = \{I, IV\}$، لذا $A' \cap B' = \{IV\}$.

**الخطوة 4** ظلل المنطقة IV لتوضيح $A' \cap B'$.




حيث إن مخططات كل طرف من المعادلة متطابقة، فإننا نستخدم التبرير الاستنتاجي لتبريد أن $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

## جرّب هذا 7

استخدم مخططات فِن Venn لتوضيح أن $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

فيما يلي ثمة مثال لاستخدام ثلاث مجموعات.

## مثال 8 استخدام مخططات فِن Venn لتحديد مساواة مجموعتين

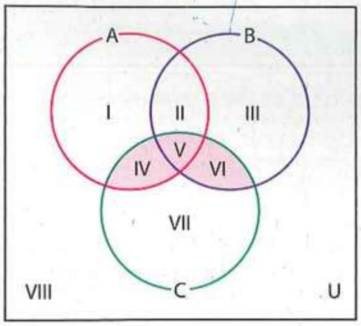
حدد ما إذا كانت هاتان المجموعتان متساويتين باستخدام مخططات فِن Venn: $(A \cup B) \cap C$ و$(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

### الحل

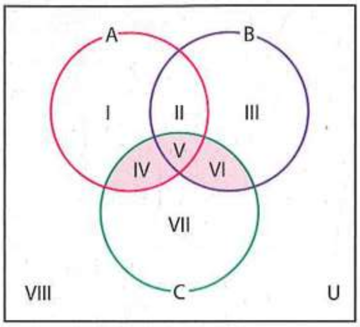
المجموعة $A \cup B$ تتكون من المناطق I إلى VI. ومن بين هذه المناطق، توجد المناطق IV وV وVI في المجموعة $C$ كذلك. لذا $(A \cup B) \cap C$ تتكون من المناطق IV وV وVI.

**ملاحظة رياضية**

كلما شعرت بالراحة في العمل باستخدام مخططات فِن Venn، ستتمكن على الأرجح من تظليل المناطق الموضحة من خلال مجموعة دون المرور بشكل رسمي عبر عملية من أربع خطوات، كما نفعل في المثال 8.




تتكون المجموعة $A \cap C$ من المنطقتين IV وV وتتكون المجموعة $B \cap C$ من المنطقتين V وVI. وينتج عن اتحادها المناطق IV وV وVI.




وحيث إن المناطق المظللة هي نفسها، فإن المجموعتين متساويتان.

## جرّب هذا 8

حدد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين باستخدام مخططات ڤن Venn، $B \cup (A \cap C)$ و$(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

4. استخدام مخططات ڤن Venn لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم لا.

## عدد العناصر الرئيسة للاتحاد

إذا كان 10 من أصدقائك ينتمون إلى مجموعة الطلاب الذين يخوضون الدورة التدريبية في الرياضيات، و14 ينتمون إلى مجموعة الطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في اللغة الإنجليزية، فما عدد الأصدقاء الذين في اتحاد هاتين المجموعتَين؟ إذا كان انطباعك الأول 24، فلست وحدك - فهذا نوع من التخمين القياسي. وقد يكون صائبًا بالفعل، ولكن فقط إذا لم يكن أحد من أصدقائك يخوض كلتا دورتَي الرياضيات واللغة الإنجليزية. فإذا كان أي منهم في كلتا الدورتَين، فستكون قد حسبته مرتَين عن طريق جمع عدد الأصدقاء في كل مجموعة. يمكن استخدام مخطط ڤن Venn لتحليل هذه الحالة.

### مثال 9 إيجاد عدد العناصر الرئيسة للاتحاد

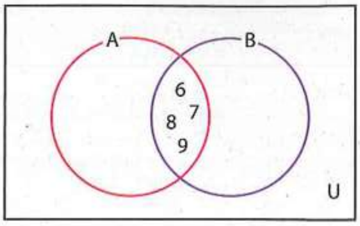
ارسم مخطط ڤن Venn يوضح المجموعات التالية، ثم استخدم المخطط لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لـ $A$ و$B$ و$A \cap B$ و$A \cup B$.

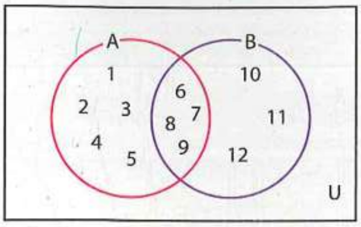
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

استخدم النتيجة لتكوين صيغة لعدد العناصر الرئيسة للاتحاد.

**الحل**

أولًا، لاحظ وجود 6 و7 و8 و9 في كلتا المجموعتين، لذا سنبدأ مخطط ڤن Venn بوضع تلك العناصر في جزء التقاطع من المخطط. ثم نضع العناصر المتبقية في $A$ داخل الدائرة المخصصة للمجموعة $A$ لكن خارج التقاطع، ونفعل الشيء نفسه مع العناصر المتبقية في $B$.




والآن يمكننا فقط العدّ لإيجاد عدد العناصر الرئيسة المشار إليها.

$$n(A) = 9 \quad n(B) = 7 \quad n(A \cap B) = 4 \quad n(A \cup B) = 12$$

من المخطط، يمكننا رؤية أنه إذا قمت بجمع عدد العناصر في المجموعتين $A$ و$B$، فستقوم بجمع العناصر الموجودة في التقاطع مرتين. لذا لتقديم تفسير لذلك يمكننا طرح عدد العناصر الموجودة في التقاطع، الأمر الذي يمنحنا الصيغة

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

## جرّب هذا 9

ارسم مخطط فِن *Venn* الذي يوضح الصيغة الخاصة بنا لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد باستخدام المجموعات التالية.

$$A = \{a, c, f, g, l, k, m, n, p\} \quad B = \{g, l, m, o, q, r, t, z\}$$

**ملاحظة رياضية**

تنص الصيغة الواردة على اليسار أنه لإيجاد عدد العناصر في اتحاد المجموعتين $A$ و$B$، تقوم بجمع عدد العناصر في $A$ و$B$ ثم تطرح عدد العناصر الموجودة في تقاطع $A$ و$B$.

### عدد العناصر الرئيسة للاتحاد

إذا كان $n(A)$ يمثل العدد الرئيس للمجموعة A، فإنه بالنسبة إلى أي مجموعتين منتهيتين A وB، $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

ثم سنرى كيف يمكن استخدام هذه الصيغة في حالة منطبقة.

### مثال 10 استخدام صيغة لعدد العناصر الرئيسة للاتحاد

في مسح شمل 100 طالب من الفرق الأولى تم اختيارهم عشوائيًا أثناء سيرهم في الحرم الجامعي، تبين أن 42 منهم يدرسون الرياضيات بينما يدرس 51 منهم اللغة الإنجليزية ويدرس 12 منهم كلتا المادتين. كم عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات أو اللغة الإنجليزية؟

**الحل**

إذا أطلقنا على مجموعة الطلاب الذين يدرسون الرياضيات $A$ ومجموعة الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية $B$، فالمطلوب منا إيجاد $n(A \cup B)$. قيل لنا إن $n(A) = 42,\ n(B) = 51$ و$n(A \cap B) = 12$. لذا،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 42 + 51 - 12 = 81$$

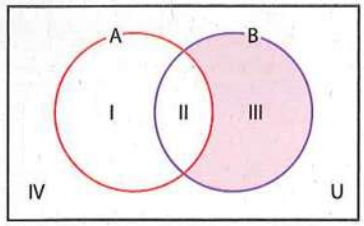
## جرّب هذا 10

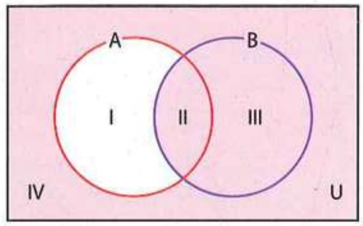
أظهر مسحٌ شمل 200 طبيب عبر إحدى البلدان أن 112 منهم كانت تتم مساعدتهم في مكاتبهم بواسطة ممرضات مسجلات، بينما 83 منهم كانت تتم مساعدتهم بواسطة ممرضات ممارسات حاصلات على رخصة و21 منهم كانت تتم مساعدتهم بواسطة كلتيهما. كم عدد الذين كانت تتم مساعدتهم بواسطة نوع واحد على الأقل من الممرضات؟

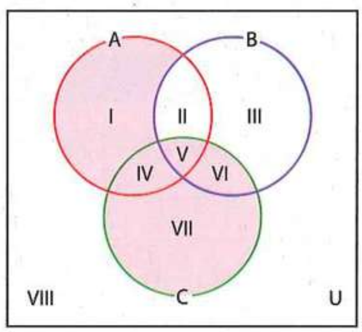
5. استخدام الصيغة لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد المجموعتين.

في هذا الدرس، رأينا كيف يمكن استخدام مخططات فِن *Venn* لعرض المجموعات وإثبات تساوي مجموعتين وحل المسائل. سنستكشف الجانب الخاص بحل المسائل لمخططات فِن *Venn* لاحقًا في الدرس 4 ونعرف كيفية حل المسائل التي تشبه الموجودة في مقدمة الوحدة.

## إجابات جرّب هذا

1



2


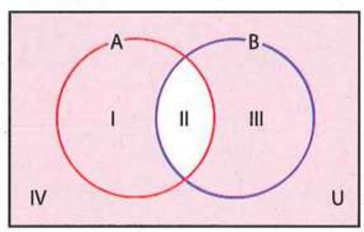

3



4 $(A \cap C) - B$ أو $(A \cap C) \cap B'$

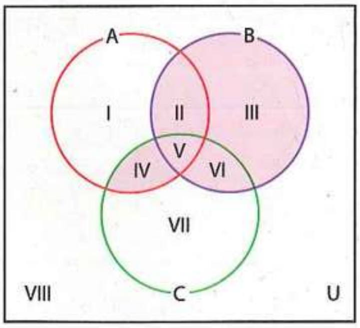
5 كلاهما {الذهب، الزئبق}.

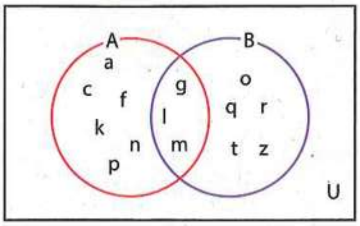
6 كلاهما {الحديد، الكروم، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق}.

7 كلا المخططين




8 كلا المخططين




9



10 174

# الدرس 5-3 مجموعة التمارين

## تمارين كتابية

1. يتصفح أحد رفاقك كتابك المدرسي ويرى بعض مخططات فن **Venn**. فتساءل، "ما فائدة هذه الصور؟" كيف ستجيب عن ذلك؟
2. اشرح بكلمات من عندك كيف ترسم مخطط فن **Venn** يمثل المجموعة $A \cup B$.
3. اشرح بكلمات من عندك كيف ترسم مخطط فن **Venn** يمثل المجموعة $A \cap B$.
4. كيف يمكننا استخدام مخططات فن **Venn** لتحديد ما إذا كانت مجموعتان تبدوان مختلفتين متساويتين بالفعل؟
5. صف بكلمات من عندك نص قوانين دي مورجان.
6. صف بكلمات من عندك كيف تجد العدد الرئيس لاتحاد مجموعتين.

## تمارين حسابية

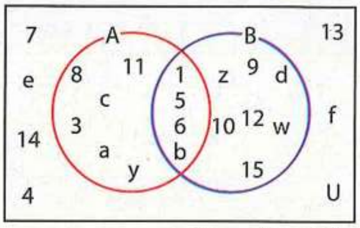
*بالنسبة إلى التمارين 30–7، ارسم مخطط فن Venn وظلل الأقسام التي تمثل كل مجموعة.*

7. $A \cup B'$
8. $(A \cup B)'$
9. $A' \cup B'$
10. $A' \cup B$
11. $A' \cap B'$
12. $A \cap B'$
13. $A \cup (B \cap C)$
14. $A \cap (B \cup C)$
15. $(A \cup B) \cup (A \cap C)$
16. $(A \cup B) \cap C$
17. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
18. $(A \cap B) \cup C$
19. $(A \cap B)' \cup C$
20. $(A \cup B) \cup C'$
21. $A \cap (B \cup C)'$
22. $A' \cap (B' \cup C')$
23. $(A' \cup B') \cap C$
24. $A \cap (B \cap C)'$
25. $(A \cup B)' \cap (A \cup C)$
26. $(B \cup C) \cup C'$
27. $A' \cap (B' \cap C')$
28. $(A \cup B)' \cap C'$
29. $A' \cap (B \cup C)'$
30. $(A \cup B) \cap (A \cap C)$

*بالنسبة إلى التمارين 38–31، استخدم مخططات فن Venn لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم لا.*

31. $A' \cup B'$ و $(A \cap B)'$
32. $A' \cup B'$ و $(A \cup B)'$
33. $(A \cup B) \cup C$ و $A \cup (B \cup C)$
34. $A \cap (B \cup C)$ و $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
35. $A' \cup (B \cap C')$ و $(A' \cup B) \cap C'$
36. $(A \cap B) \cup C'$ و $(A \cap B) \cup (B \cap C')$
37. $(A \cap B)' \cup C$ و $(A' \cup B') \cap C$
38. $(A' \cup B') \cup C$ و $(A \cap B)' \cap C'$

*بالنسبة إلى التمارين 50–39، استخدم مخطط فن Venn التالي لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لكل مجموعة.*




39. $n(A)$
40. $n(B)$
41. $n(A \cap B)$
42. $n(A \cup B)$
43. $n(A')$
44. $n(B')$
45. $n(A' \cap B')$
46. $n(A' \cup B')$
47. $n(A - B)$
48. $n(B - A)$
49. $n(A \cap (B - A))$
50. $n(B' \cup (B - A))$

*بالنسبة إلى التمارين 60–51، استخدم المعلومات التالية:*

$U = \{x / x$ عدد طبيعي أقل من 20$\}$
$A = \{x / x$ عدد طبيعي فردي أقل من 16$\}$
$B = \{x / x$ عدد أولي أكبر من 5$\}$

*(ملاحظة: الأعداد الأولية الأقل من 20 هي 2 و3 و5 و7 و11 و13 و17 و19.) جـد عدد العناصر الرئيسة لكل مجموعة.*

51. $n(A)$
52. $n(B)$
53. $n(A \cap B)$
54. $n(A \cup B)$
55. $n(A \cap B')$
56. $n(A' \cup B)$
57. $n(A')$
58. $n(B')$
59. $n(A - B)$
60. $n(B' - A)$

## التطبيقات في عالمنا

*في التمارين 61-64. $A$ = {الأشخاص الذين يقودون سيارة رياضية متعددة الأغراض} و$B$ = {الأشخاص الذين يقودون سيارة هجين}. ارسم مخطط فن Venn لما يلي، واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.*

61. $A \cup B$
62. $A \cap B$
63. $A'$
64. $(A \cap B)'$

# مجموعة التمارين يُتبع

في التمارين 68-65، $O$ = {الطلاب في دورات تدريبية عبر الإنترنت} و$B$ = {الطلاب في دورات تدريبية متنوعة} و$T$ = {الطلاب في دورات تدريبية تقليدية}. ارسم مخطط فِن Venn لما يلي، واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

65. $O \cap (T \cup B)$
66. $B \cup (O \cap T)$
67. $B \cap O \cap T$
68. $(B \cup O) \cap (T \cup O)$

في التمارين 72-69، $D$ = {الطلاب من الرياض} و$R$ = {الطلاب من جدة} و$I$ = {الطلاب لا من هذه ولا تلك}. ارسم مخطط فِن Venn لما يلي، واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

69. $D' \cup R$
70. $D' \cap I'$
71. $(D \cup R) \cap I'$
72. $I - (D \cup R)$

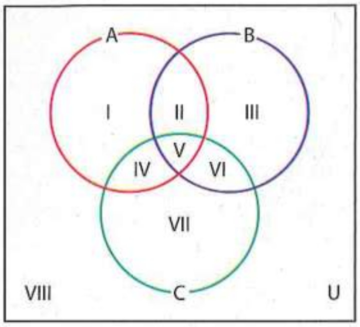
في التمارين 76-73، $G$ = {الأشخاص الذين يستخدمون Google بانتظام} و$Y$ = {الأشخاص الذين يستخدمون Yahoo! بانتظام} و$B$ = {الأشخاص الذين يستخدمون Bing بانتظام}. ارسم مخطط فِن Venn لما يلي، واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

73. $G - Y$
74. $G - (Y \cap B)$
75. $G' \cap Y' \cap B'$
76. $(Y \cap B) \cup (Y \cap G)$

يُستخدم الجدول ومخطط فِن Venn التالي في التمرينات 82-77. يعرض الجدول الفرق الست المشاركة في دورة الترقي بدوري الدرجة الثانية لكرة القدم من عام 2013 إلى 2015. بالنسبة إلى كل تمرين، اكتب المنطقة (المناطق) ضمن مخطط فِن Venn التي ستتضمن الفريق المدرج.

| 2013 | | 2014 | | 2015 |
|---|---|---|---|---|
| النصر | | الرائد | | النصر |
| الرائد | | النصر | | الرائد |
| الهلال | | الأبطال | | الهلال |
| الاتحاد | | الاتحاد | | التضامن |
| الأصدقاء | | الهلال | | الأصدقاء |
| الفرسان | | النسور | | الأبطال |

ملاحظة: تمثل المجموعة $A$ الفرق المشاركة في دورة الترقي عام 2013 بينما تمثل المجموعة $B$ الفرق المشاركة في دورة الترقي عام 2014 وتمثل المجموعة $C$ الفرق المشاركة في دورة الترقي عام 2015.




77. الاتحاد
78. الأصدقاء
79. الفرسان
80. النسور
81. الأبطال
82. الشباب

## التفكير الناقد

83. بالنسبة إلى المجموعتين المنتهيتين $A$ و$B$، هل $n(A - B)$ تساوي $n(A) - n(B)$؟ وإذا كانت الإجابة لا، فهل يمكنك إيجاد صيغة لـ $n(A - B)$؟
84. هل يمكنك إيجاد صيغة لـ $n(A \cap B)$ بدلالة $n(A)$ و$n(B)$ فقط؟ لمَ أو لمَ لا؟ اكتشف ما إذا كان يمكنك إيجاد صيغة لـ $n(A \cap B)$ باستخدام أي المجموعات التي تفضلها.
85. خمن شكلًا آخر للمجموعة $(A \cup B \cup C)'$ استنادًا إلى أول قوانين دي مورجان. تحقق من تخمينك باستخدام مخطط فِن Venn.
86. خمن شكلًا آخر للمجموعة $(A \cap B \cap C)'$ استنادًا إلى ثاني قوانين دي مورجان. تحقق من تخمينك باستخدام مخطط فِن Venn.

في التمارين 92-87، (a) استخدم مخطط فِن Venn لتوضيح أن المجموعتين غير متساويتين بشكل عام؛ (b) حاول إيجاد مجموعتين محددتين $A$ و$B$ (و$C$ إذا لزم الأمر) تكون المجموعتان متساويتين فيهما؛ و(c) حاول إيجاد شرط عام تكون بموجبه المجموعتان متساويتين دومًا. تذكر أن $U$ تمثل المجموعة الشاملة.

87. $A \cap B$ و$B$
88. $A - B$ و$A$
89. $(A \cap B)'$ و$U$
90. $(A \cap B)'$ و$A'$
91. $(A - C) \cap B$ و$B \cap A$
92. $(A - C) \cup (B - A)$ و$B - C$

الدرس

# 5-4 استخدام المجموعات لحل المسائل

## ::أهداف التعلم

1 حل المسائل باستخدام مخططات فِن *Venn*.

لقد أصبح التواصل في عالمنا أقل تكلفة وأيسر وأكثر فاعلية طوال الوقت. ففي عصر الهواتف الذكية وفاعلية الإنترنت على مدار الساعة، وجدت الشركات أن التواصل مع الأشخاص لاستطلاع آرائهم أصبح أسهل من ذي قبل، وبات الأشخاص يكتشفون أن الشركات ترغب في الدفع مقابل سماع ما يريدون الإفصاح عنه. كما أصبح العالم اليوم يضم مئات الشركات حرفيًا تتمثل وظيفتها الرئيسة في جمع الآراء حول أي شيء بداية من المرشحين السياسيين وحتى شرائح البطاطس. وبالفعل، يتم إنفاق المليارات على أبحاث السوق كل عام. ربما ستفكر مرتَين في المرة التالية التي سيسألك فيها شخص ما عن رأيك مجانًا.

مع وضع الأموال على المحك، ليس من المستغرب أن يكون تنظيم كافة البيانات التي يتم جمعها ذا أهمية. ومن المؤكد أن هذا يشبه إلى حد كبير ما نستخدم نظرية المجموعات لأجله! لقد عرفنا الكثير عن العمل باستخدام مخططات فِن *Venn* حتى الآن. وأرى أن هذه المعرفة تُعد طريقة رائعة لتنظيم البيانات التي يتم جمعها من عمليات المسح وغيرها من المصادر. (حقًا، ودون أي رسوم- يمكنك معرفة هذا الرأي دون مقابل).

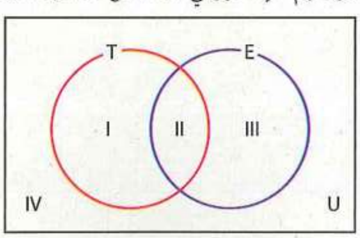
عند تصنيف الأشياء إلى مجموعتَين منفصلتَين، يمكننا استخدام مخطط فِن *Venn* مجموعتَين لتفسير المعلومات. ويتضح ذلك في المثال 1.

### مثال 1 حل مسألة باستخدام مخططات فِن *Venn*

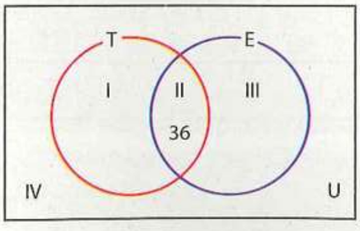
تتبع دولة تضم 50 مدينة أحد أساليب تحصيل رسوم الطريق، 44 مدينة ممن شملها المسح استخدمت المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق بينما استخدمت 36 مدينة مواقف تحصيل رسوم الطرق وتحصيل الرسوم الإلكتروني (ETC). ارسم مخطط فِن *Venn* لتمثيل نتائج المسح وجـــد عدد المدن التي تتبع نظام تحصيل الرسوم التقليدي فقط وعدد المدن التي تتبع نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني فقط. وعدد المدن التي لا تتبع أيًا منهما.

**الحل**

**الخطوة 1** ارسم مخطط فِن *Venn* بدوائر تمثل المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق ($T$) ونظام تحصيل الرسوم الإلكتروني ($E$). مع تسمية المناطق بأرقام رومانية كالمعتاد.



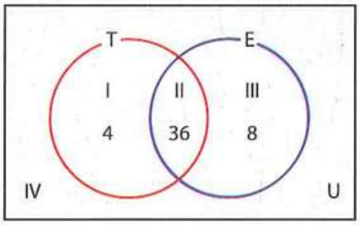

**الخطوة 2** تستخدم ست وثلاثون مدينة كلا النظامين، لذلك ضع 36 في تقاطع $T$ و$E$، وهو ما تمثله المنطقة II.



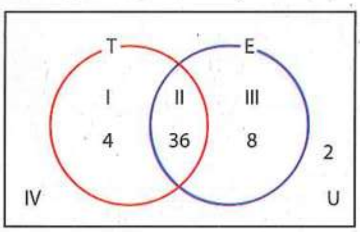

**ملاحظة رياضية**

أول معلومة حصلنا عليها هي أن هناك 36 مدينة تتبع المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق، لذا فمن المحفز البدء بوضع 36 في المنطقة I. لكن هذا ليس صحيحًا— فالمنطقة I تمثل المدن التي تستخدم نظام المواقف التقليدية لتحصيل الرسوم وليس نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني ولا نعرف ذلك الرقم بعد. وإذا كنا نعلم العدد الموجود في التقاطع، فهذا هو الموضع الذي سنبدأ منه دومًا.

**الخطوة 3** وحيث إن 40 مدينة تستخدم المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق وتتبع 36 مدينة كلا النظامين، فيجب وجود 4 مدن تستخدم المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق فقط. ضع 4 في المنطقة I. حيث إن 44 مدينة تستخدم نظام التحصيل الإلكتروني وتتبع 36 مدينة كلا النظامين، فيجب وجود 8 مدن تتبع نظام التحصيل الإلكتروني فقط. ضع 8 في المنطقة III.




**الخطوة 4** الآن تم تمثيل 48 مدينة، لذلك يجب أن تتبقى مدينتان لوضعهما في المنطقة IV.




الآن يمكننا الإجابة عن الأسئلة بسهولة. توجد 4 مدن تستخدم المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق وليس نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني (المنطقة I) وتتبع 8 مدن نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني وليس المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق (المنطقة III) ولا تتبع مدينتان فقط أيًّا من النظامين (المنطقة IV).

## جرّب هذا 1

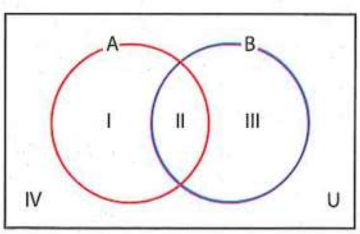
في سنة عادية، تشهد المدينة A هطول بعض الأمطار خلال 163 يومًا وبعض الثلوج خلال 63 يومًا وكلاهما خلال 24 يومًا. ارسم مخطط فِن *Venn* لتمثيل هذه القيم المتوسطة، وجــد عدد الأيام التي تشهد هطول أمطار فقط وثلوجًا فقط والتي لا تشهد أيًّا منهما.

يمكننا استخدام نتائج المثال 1 لكتابة إجراء عام لاستخدام مخطط فِن *Venn* لتفسير المعلومات التي يمكن تقسيمها إلى مجموعتَين.

### استخدام مخططات فِن *Venn* بمجموعتين

**الخطوة 1** جــد عدد العناصر المشتركة بين كلتا المجموعتين واكتب ذلك العدد في المنطقة II.

**الخطوة 2** جــد عدد العناصر الموجودة في المجموعة $A$ وغير موجودة في المجموعة $B$ بطرح العدد الموجود في المنطقة II من إجمالي عدد العناصر في $A$. ثم اكتب ذلك العدد في المنطقة I. كرر ذلك مع العناصر الموجودة في $B$ لكن غير موجودة في المنطقة II، واكتبه في المنطقة III.




**الخطوة 3** جــد عدد العناصر الموجودة في $U$ وغير الموجودة في $A$ أو $B$، واكتبه في المنطقة IV.

**الخطوة 4** استخدم الرسم التخطيطي للإجابة عن أسئلة محددة متعلقة بهذه الحالة.

من بين التطبيقات الأكثر إفادة لمخططات فِن *Venn* هو استخدامها لدراسة نتائج عمليات المسح. فسواء أكانت الأبحاث متعلقة بالأعمال أم لمجرد إرضاء الفضول، فإن عمليات المسح تبدو منتشرة في كل مكان هذه الأيام، لاسيما عبر الإنترنت. يحلل المثال 2 نتائج مسح حول اقتناء نوع السيارة.


تتضمن العديد من المواقع الإخبارية الإلكترونية عمليات مسح يومية، مثل هذا المسح من موقع cnn.com

## مثال 2 حل مسألة مسح باستخدام مخطط فِن *Venn*

في مسح ما، سُئل 500 شخص عبر الاتصال الهاتفي العشوائي ما إذا كان لديهم سيارة صالون أو سيارة رياضية متعددة الأغراض (SUV). أفاد 79 من بين هؤلاء بامتلاك سيارة صالون فقط وأفاد 31 منهم بامتلاك سيارة رياضية متعددة الأغراض فقط وأفاد 151 منهم بامتلاك واحدة على الأقل من الاثنتين. ارسم مخطط فِن *Venn* لتمثيل هذه النتائج واستخدم رسمك التخطيطي لإيجاد النسبة المئوية من المستجيبين الذين يمتلكون سيارة صالون والذين يمتلكون سيارة رياضية متعددة الأغراض والذين يمتلكون كلتيهما والذين لا يمتلكون أيًا منهما.

### الحل

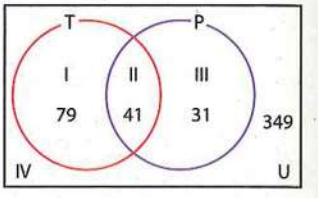
في هذا المثال، سيتعين علينا تعديل الإجراء من المثال 1 لأننا لا نعرف عدد من يمتلك كلتا السيارتين. ويتمثل مفتاح الحل في البدء بتعبئة المعلومات المعطاة التي تتوافق تمامًا مع إحدى المناطق في مخطط فِن *Venn*.

**الخطوة 1** أُخبرنا بأن 79 شخصًا يمتلكون سيارة صالون فقط، ما يعني أنه يمكننا وضع 79 في المنطقة I. وأخبرنا كذلك بأن 31 شخصًا يمتلكون سيارة رياضية متعددة الأغراض فقط، لذلك يتم وضع ذلك في المنطقة III.

**الخطوة 2** يملك 151 سيارة صالون أو سيارة رياضية متعددة الأغراض أو كلتيهما. وهذا يمثل اتحاد المجموعتين $T$ و$P$، والذي يشكل المناطق I وII وIII. ونعلم بالفعل أن هناك 110 أشخاص في المنطقتين I وIII مجتمعين $(31 + 79)$، لذا يجب أن يوجد $41 = 110 - 151$ شخصًا في المنطقة II.

**الخطوة 3** تم تمثيل 151 من أصل 500 حتى الآن، لذلك يجب أن تحتوي المنطقة IV على $500 - 151 = 349$ شخصًا.

**الخطوة 4** ثمة إجمالي 120 شخصًا في المناطق التي تكون المجموعة $T$، لذلك يملك 120 شخصًا سيارة صالون؛ $120/500 = 0.24$، إذًا يمتلك 24% سيارة صالون. ويملك اثنان وسبعون سيارة رياضية متعدد الأغراض (14.4%)، بينما يملك 41 كلتا السيارتين (8.2%)، ولا يملك 349 أيًا منهما (69.8%).




## جرّب هذا 2

وفق مسح عبر الإنترنت على أحد المواقع، أبدى 12,595 شخصًا آراءهم بشأن مشروب الكوكا مقابل البيبسي. من بين هؤلاء، يتناول 5,786 شخصًا الكوكا فقط بينما يتناول 3,763 البيبسي فقط ويتناول 11,405 أشخاص أحدهما على الأقل. ارسم مخطط فِن *Venn* لتمثيل هذه النتائج واستخدم رسمك التخطيطي لإيجاد النسبة المئوية من المشاركين الذين يتناولون الكوكا والذين يتناولون البيبسي والذين يتناولون كلا المشروبين والذين لا يتناولون أيًا منهما.

## معلومات إضافية الجانب المضيء من استطلاعات الرأي

لقد أصبح معظمنا معتادًا إلى حد ما على عمليات مسح الرأي العام التي تتناول قضايا مهمة—السياسة وتغير المناخ والاقتصاد— لكن ليس كل مسح بذلك المستوى من الجدية تمامًا. لنلقِ نظرة على بعض الحقائق الغريبة التي نتجت من عمليات المسح الأخيرة.

- تم العثور على حوالي 50% من أجهزة التحكم عن بعد المفقودة داخل وسائد الأثاث. وانتهى المطاف بحوالي 4% منها في الثلاجة أو المجمد وحوالي 2% وجد خارج المنزل أو في السيارة.
- يعتقد 29% من الأشخاص أن "الحوسبة السحابية" تنطوي على سُحب فعلية في السماء.
- اعترف أكثر من 60% ممن أعلنوا أنهم نباتيون بتناول اللحوم في الـ 24 ساعة الماضية.
- لا يضع 47% من الأشخاص فلسًا واحدًا من راتبهم في مدخرات طويلة الأجل.
- 52% من الأشخاص يغنون أثناء الاستحمام. تُنسب مخططات فِن *Venn* بوجه عام إلى عالم الرياضيات البريطاني جون فِن، الذي قدمها عام 1880 على النحو الذي تستخدم عليه اليوم. هذا يجعل الأمر يبدو مفهومًا قديمًا إلى حدٍ ما، لكن يمكن أن ترجع جذور الفكرة العامة إلى أبعد من ذلك بكثير. فقد استخدم عالم الرياضيات الكبير ليونهارد أويلر مخططات مشابهة في القرن الثامن عشر ويمكن أن ترجع جذور أشكال أخرى مماثلة إلى القرن الثالث عشر!

بينما كان من الحقيقي بلا ريب أن جون فِن كان أكاديميًا كلاسيكيًا—فقد كان يكتب أو يحاضر في كل من الأخلاق والرياضيات والمنطق ونظرية الاحتمالية والفلسفة والميتافيزيقيا والتاريخ في الوقت نفسه—إلا أنه كان يمارس هواية مدهشة إلى حد ما؛ إنشاء الآلات. وعلى وجه الخصوص، كان معروفًا أكثر ببناء آلة لقذف كرات الكريكيت (وهو ما يشبه القذف في لعبة البيسبول تقريبًا). كانت آلته جيدة جدًا لدرجة أنها حققت في عام 1909 "رمية نظيفة" أمام أحد أفضل لاعبي الكريكيت في ذلك الوقت في أربع مناسبات.

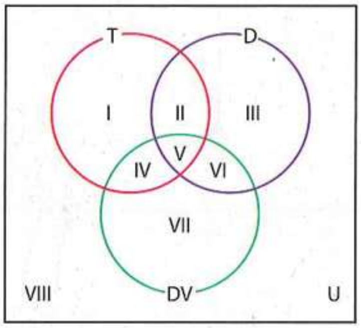
عندما تتكون مسألة التصنيف أو المسح من ثلاث مجموعات، يُتبَع إجراء مشابه، مع استخدام مخطط فِن *Venn* لثلاث مجموعات. فلدينا فقط المزيد من العمل للقيام به حيث يوجد الآن ثماني مناطق بدلًا من أربع.

## مثال 3 حل مسألة باستخدام مخطط فِن *Venn* من ثلاث مجموعات

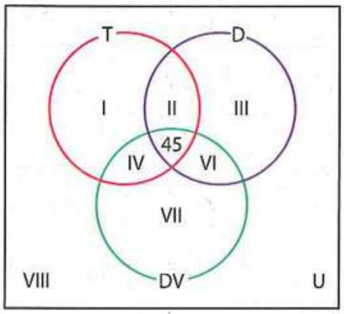
يدرس طالب معدل تكرار أنواع محددة من البريد المستلم في مدينة مجاورة. يدرس البريد المستلم لعدد 300 مقيم في المدينة، ويسأل تحديدًا عن طلبات التبرع لجمعيات خيرية محلية والإعلانات وفواتير المرافق. ووجد أن 194 قد تلقوا فواتير بينما تلقى 210 طلبات تبرع و170 إعلانات. بالإضافة إلى ذلك، تلقى 142 بريدًا بشأن فواتير المرافق وطلبات التبرع و111 بشأن طلبات التبرع والإعلانات و91 بشأن الإعلانات وفواتير المرافق وتلقى 45 الأنواع الثلاثة. ارسم مخطط فِن *Venn* لتمثيل هذه النتائج، وجد عدد المقيمين الذين تلقوا بريدًا بشأن

(a) طلبات التبرع فقط.
(b) الإعلانات وفواتير المرافق وليس طلبات التبرع.
(c) فواتير المرافق وطلبات الجمعيات الخيرية.
(d) لا شيء من ذلك.

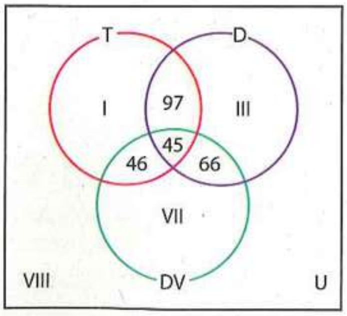
### الحل



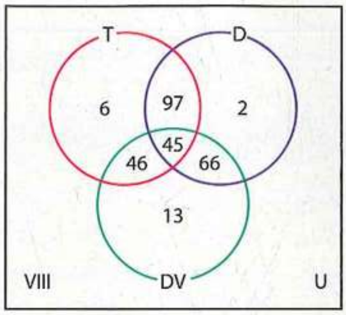

**الخطوة 1** المنطقة الوحيدة التي نعرفها على وجه اليقين من المعلومات المعطاة هي المنطقة V—عدد المقيمين الذين تلقوا أنواع البريد الثلاثة هذه. لذلك نبدأ بوضع 45 في المنطقة V.



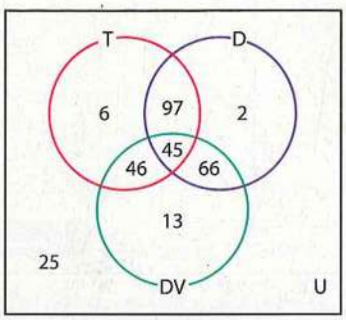

**الخطوة 2** ثمة 142 مقيمًا تلقوا بريدًا بشأن فواتير المرافق وطلبات التبرع الخيرية معًا، لكن يتعين علينا طرح عدد المقيمين الذين تلقوا أنواع البريد الثلاثة لإيجاد العدد في المنطقة II: $142 - 45 = 97$. وبالطريقة نفسها، نحصل على $91 - 45 = 46$ في المنطقة IV (فواتير المرافق والإعلانات معًا) و$111 - 45 = 66$ في المنطقة VI (طلبات التبرع والإعلانات معًا).



**الخطوة 3** الآن يمكننا إيجاد عدد العناصر في المناطق I وIII وVII. كان هناك 194قد تلقوا بريدًا بشأن فواتير المرافق، لكن $97 + 45 + 46 = 188$ تم تمثيلهم بالفعل في الرسم التخطيطي، لذا يتبقى 6 في المنطقة I. من بين 210 مقيمًا ممن تلقوا بريدًا بشأن طلبات التبرع، $97 + 45 + 66 = 208$ تم تمثيلهم بالفعل، مع ترك 2 فقط في المنطقة III. كان هناك 170 مقيمًا تلقوا بريدًا بشأن الإعلانات، مع $46 + 45 + 66 = 157$ تم تمثيلهم بالفعل. يتبقى 13 فقط في المنطقة VII.




**الخطوة 4** بجمع جميع الأعداد في المخطط حتى الآن، نحصل على 275. ويتبقى 25 فقط في المنطقة VIII.




**الخطوة 5** والآن بعد اكتمال المخطط، نوجه اهتمامنا نحو الأسئلة.

(a) يوجد المقيمون الذين تلقوا بريدًا بشأن طلبات التبرع فقط في المنطقة III؛ يوجد 2 فقط.
(b) توجد فواتير المرافق والإعلانات دون طلبات التبرع في المنطقة IV، لذلك يوجد 46 مقيمًا.
(c) يوجد المقيمون الذين تلقوا طلبات التبرع أو فواتير المرافق في جميع المناطق باستثناء VII وVIII. لذلك لا يوجد إلا $38 = 25 + 13$ لم يتلقوا نوعًا واحدًا على الأقل من تلك الأنواع، و$262 = 38 - 300$ تلقوا نوعًا واحدًا على الأقل منها.
(d) 25 مقيمًا فقط (خارج جميع الدوائر) لم يتلقوا أيًا من رسائل البريد تلك.

**ملاحظة رياضية**

لاحظ أنه عند ملء مخطط فِن *Venn* في المثال 3، بدأنا بعدد العناصر في المنطقة الداخلية وتدرجنا إلى الخارج.

## جرّب هذا 3

أجرت مكتبة إلكترونية عبر الإنترنت مسحًا شمل 500 قارئ ووجدت أن 270 شخصًا يقرؤون قصص المغامرات و320 شخصًا يقرؤون القصص البوليسية و160 شخصًا يقرؤون قصص الفكاهة. بالإضافة إلى ذلك، هناك 140 شخصًا يقرؤون القصص البوليسية وقصص المغامرات معًا و120 شخصًا يقرؤون القصص البوليسية وقصص الفكاهة و80 شخصًا يقرؤون قصص المغامرات وقصص الفكاهة. وأخيرًا، 50 شخصًا يقرؤون الأنواع الثلاثة. ارسم مخطط فِن *Venn* يمثل نتائج المسح ثم جــد عدد القراء الذين

(a) يقرؤون قصص المغامرات فقط.
(b) يقرؤون القصص البوليسية وقصص الفكاهة ولكن لا يقرؤون قصص المغامرات.
(c) لا يقرؤون أيًا من أنواع القصص الثلاثة.
(d) لا يقرؤون قصص الفكاهة.

1. حل المسائل باستخدام مخططات فِن *Venn*.

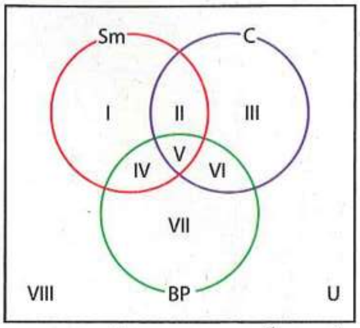
بدلًا من كتابة إجراء عام لحل المسائل باستخدام مخطط فِن *Venn* لثلاث دوائر، سنحل مثالًا إضافيًا. وتُعد المعلومات المقدَّمة في هذه المرة مختلفة نوعًا ما. ويتمثل المفتاح، وهو بالفعل مفتاح لحل كل هذه المسائل، في إيجاد المعلومات التي تنطبق تحديدًا على بعض المناطق في المخطط، ومن ثم استخدام الطرح لإيجاد المناطق الأخرى واحدة تلو الأخرى.

## مثال 4 حل مسألة باستخدام مخطط فِن *Venn* من ثلاث مجموعات

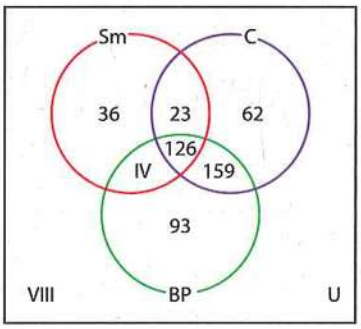
يمثل ارتفاع ضغط الدم وارتفاع الكوليسترول والتدخين ثلاثة من أخطر عوامل الخطر للإصابة بالأزمة القلبية. في مسح أجري على 690 شخصًا من الناجين من الأزمة القلبية، كان يعاني 62 شخصًا فقط من ارتفاع الكوليسترول من بين عوامل الخطر الثلاثة تلك؛ ويعاني 36 شخصًا فقط من التدخين؛ ويعاني 93 شخصًا فقط من ارتفاع ضغط الدم. وثمة إجمالي 370 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول و159 شخصًا يعانون من ارتفاع ضغط الدم والكوليسترول وغير مدخنين و23 مدخنون ويعانون من ارتفاع الكوليسترول ولا يعانون من ارتفاع ضغط الدم. أخيرًا، يعاني 585 شخصًا من عمل خطر واحد على الأقل. ارسم مخطط فِن *Venn* يمثل هذه المعلومات واستخدمه للإجابة عن الأسئلة التالية.

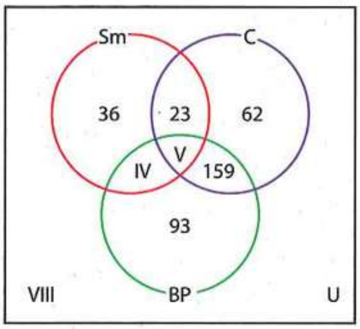
(a) كم عدد الناجين الذين يعانون من عوامل الخطر الثلاثة؟
(b) كم عدد الذين يعانون من عاملين تحديدًا من عوامل الخطر الثلاثة؟
(c) كم عدد الذين لا يعانون من أي من هذه العوامل؟
(d) كم بلغت النسبة المئوية للمدخنين؟

### الحل



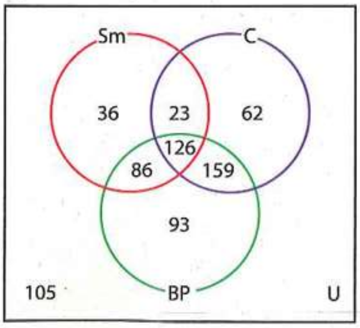

**الخطوة 1** تختلف هذه المسألة قليلًا عن السابقة لأنه ليس لدينا عدد الأشخاص الموجودين في منطقة تقاطع المجموعات الثلاث. إلا أنه توجد أخبار جيدة تتمثل في أننا حصلنا بالفعل على العدد الدقيق في خمس مناطق مختلفة: 62 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول فقط (المنطقة III) و36 شخصًا مدخنًا فقط (المنطقة I) و93 شخصًا يعانون من ارتفاع ضغط الدم فقط (المنطقة VII) و159 شخصًا يعانون من ارتفاع ضغط الدم والكوليسترول ولكنهم غير مدخنين (المنطقة VI) و23 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول والتدخين ولكنهم لا يعانون من ارتفاع ضغط الدم (المنطقة II).




**الخطوة 2** ثمة إجمالي 370 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول، ولدينا $23 + 62 + 159 = 244$ تم تمثيلهم حتى الآن، لذلك يجب أن تحتوي المنطقة V على ناجيًا $370 - 244 = 126$.

**الخطوة 3** المعلومة الأخيرة التي لدينا هي أنه يوجد 585 شخصًا يعانون من عامل خطر واحد على الأقل. سيتيح لنا ذلك إيجاد المنطقتين المتبقيتين. تُضاف جميع الأعداد الموجودة حاليًا في الرسم التخطيطي إلى 499، لذلك يجب أن تحتوي المنطقة IV على ناجيًا $585 - 499 = 86$. وكذلك إذا كان 585 مريضًا يعانون من عامل خطر واحد على الأقل، فيتبقى وفق ذلك $690 - 585 = 105$ في المنطقة VIII.



**الخطوة 4** يمكننا الآن الإجابة عن مجموعة كبيرة من الأسئلة حول الدراسة.

(a) يحتوي التقاطع بين عوامل الخطر الثلاثة على 126 ناجيًا.

(b) تمثل المناطق II وIV وVI المرضى الذين يعانون من عاملين تحديدًا من عوامل الخطر؛ ما يساوي ناجيًا $268 = 159 + 23 + 86$.

(c) ونلاحظ من المنطقة VIII أن 105 مرضى لا يعانون من أي من عوامل الخطر.

(d) يبلغ إجمالي العدد الموجود داخل دائرة المدخنين $271 = 86 + 126 + 23 + 36$؛ ويمثل ذلك 271/690، أو 39.3% من الناجين.

## جرّب هذا 4

ثمة ثلاثة عوامل خطر أخرى وهي السمنة وتاريخ عائلي لأمراض القلب والضغط. ضمن مجموعة المرضى المصابين بأزمة قلبية في المثال 4، امتلك 213 تاريخًا عائليًا لأمراض القلب، عانى 47 منهم كذلك من الإجهاد ولم يعانوا من السمنة وعانى 60 من السمنة ولم يعانوا من مشاكل الضغط و12 لم يعانوا من الضغط ولا السمنة. كان الضغط عاملًا لإجمالي 170 شخصًا، لم يمتلك 8 منهم تاريخًا عائليًا ولم يعانوا من السمنة. ثمة 396 مريضًا لا يعانون من أي من عوامل الخطر الثلاثة هذه.

(a) كم عدد المرضى الذين عانوا من السمنة؟

(b) ما النسبة المئوية التي مثلتها عوامل الخطر الثلاثة هذه؟

(c) كم عدد المرضى الذين لم يعانوا من السمنة وليس لديهم تاريخ عائلي للإصابة بأمراض القلب؟

لقد قطعنا شوطًا طويلًا جدًا من مجرد تحديد المجموعات والعناصر فقط! في هذا الدرس، رأينا أنه يمكن استخدام مخططات فِن *Venn* بفعالية لفرز بعض الحالات المعقدة جدًا في عالمنا. وكلما ازدادت براعتك في تفسير المعلومات، زادت جودة استعدادك للبقاء والازدهار في عصر المعلومات.

## إجابات جرّب هذا

1 أمطار فقط: 139؛ ثلوج فقط: 39؛ لا هذا ولا ذاك: 163 (بفرض أنها ليست سنة كبيسة!)

2 كوكا: 60.7%، بيبسي: 44.6% كلاهما: 14.7%، لا هذا ولا ذاك: 9.4%

3 (a)100 (c)40 (b)70 (d)340

4 (a)227 (b)13.6% (c)404

# مجموعة التمارين

## التطبيقات في عالمنا

1. في مسح شمل 85 طالبًا جامعيًا، يستخدم 72 طالبًا البريد الإلكتروني للتواصل ويستخدم 31 طالبًا المراسلة الفورية (IM) ويستخدم 21 طالبًا كليهما.
   (a) كم عدد مستخدمي المراسلة الفورية (IM) فقط؟
   (b) كم عدد مستخدمي البريد الإلكتروني فقط؟
   (c) كم عدد الذين لا يستخدمون هذا ولا ذاك؟

2. في صف دراسي يضم 25 طالبًا، كان هناك 18 طالبًا متخصصًا في الرياضيات و12 طالبًا متخصصًا في علوم الحاسوب و7 طلاب مزدوجي التخصص في الرياضيات وعلوم الحاسوب.
   (a) كم عدد الطلاب المتخصصين في الرياضيات فقط؟
   (b) كم عدد الطلاب غير المتخصصين في علوم الحاسوب؟
   (c) كم عدد الطلاب غير المتخصصين في الرياضيات أو علوم الحاسوب؟

3. يوضّح بحث في سجلات الجامعة شمل 250 من طلاب الفرقة الأولى في جامعة الولاية أن 26 طالبًا قد حصلوا على شهادة من الكلية بإتمام دورات تدريبية في العلوم دون دورات تدريبية في الرياضيات وأن 12 طالبًا قد حصلوا على شهادة من الكلية بإتمام دورات تدريبية في الرياضيات دون دورات تدريبية في العلوم. وثمة 202 طالب لم يحصلوا على شهادات لأي منهما.
   (a) كم عدد الطلاب الذين حصلوا على شهادة من الكلية في الرياضيات؟
   (b) كم عدد الطلاب الذين حصلوا على شهادة من الكلية بإتمام دورات تدريبية في العلوم؟

4. استُخدم خمسة وعشرون فأرًا في تجربة خاصة بعلم الأحياء متضمنةً التعرض للمواد الكيميائية الموجودة في دخان السجائر. أصيب خمسة عشر بورم واحد على الأقل وعانى تسعة من فشل في الجهاز التنفسي وأصيب أربعة بأورام وفشل في الجهاز التنفسي.
   (a) كم عدد الفئران المصابة بأورام؟
   (b) كم عدد الفئران غير المصابة بورم؟
   (c) كم عدد الفئران الذين عانوا من أثر واحد على الأقل من هذه الآثار؟

5. من بين 20 طالبًا خضعوا لاختبار نصف العام في علم النفس، أجاب 15 طالبًا عن السؤال الأول من السؤالين الإضافيين وأجاب 13 طالبًا عن السؤال الإضافي الثاني ولم يحاول 2 مجرد الإجابة عن أي منهما.
   (a) ما النسبة المئوية للطلاب الذين اجتهدوا في الإجابة عن السؤالين؟
   (b) ما النسبة المئوية للطلاب الذين اجتهدوا في الإجابة عن سؤال واحد على الأقل؟

6. في دراسة أجريت على 400 من المقبلات المقدّمة في 75 من مطاعم الحرم الجامعي، تضمن 70 منها أقل من 10 جرامات من الدهون ولكن ليس أقل من 350 سعرة حرارية؛ تضمن 48 منها أقل من 350 سعرة حرارية ولكن ليس أقل من 10 جرامات من الدهون؛ تضمن 140 منها أكثر من 350 سعرة حرارية وأكثر من 10 جرامات من الدهون.
   (a) ما النسبة المئوية للدهون التي تضمنت أقل من 10 جرامات من الدهون؟
   (b) ما النسبة المئوية للمقبلات التي تضمنت أقل من 350 سعرة حرارية؟

7. أجرى قسم المساعدات المالية في الجامعة مسحًا شمل 70 طالبًا، وسألهم ما إذا كانوا يحصلون على أي نوع من المساعدات المالية. لُخِّصت نتائج المسح في الجدول التالي.

| عدد الطلاب | المساعدة المالية |
|---|---|
| 16 | المنح الدراسية |
| 24 | قروض الطلاب |
| 20 | المنح الخاصة |
| 9 | المنح الدراسية والقروض |
| 11 | القروض والمنح الخاصة |
| 7 | المنح الدراسية والمنح الخاصة |
| 2 | المنح الدراسية والقروض والمنح الخاصة |

   (a) كم عدد الطلاب الحاصلين على منح دراسية فقط؟
   (b) كم عدد الطلاب الحاصلين على قروض ومنح خاصة وغير حاصلين على منح دراسية؟
   (c) كم عدد الطلاب غير الحاصلين على أي من أنواع المساعدات المالية هذه؟

8. تضع مديرة صالة الألعاب الرياضية بالحرم الجامعي جدول دروس اللياقة البدنية للعام الدراسي الجديد، وستقرر عدد مرات انعقاد دروس معينة استنادًا إلى اهتمامات الطلاب. حيث أجرت مسحًا شمل 47 طالبًا في أوقات مختلفة من اليوم، حيث سألتهم عن نوع الدروس التي سيهتمون بحضورها. لخّصت النتائج في الجدول التالي.

| الطلاب المهتمون | نوع الدرس |
|---|---|
| 17 | اليوجا |
| 13 | تمارين البيلاتس |
| 12 | الدراجة الثابتة |
| 9 | اليوجا وتمارين البيلاتس |
| 3 | تمارين البيلاتس والدراجة الثابتة |
| 5 | اليوجا والدراجة الثابتة |
| 2 | الثلاثة جميعًا |

   (a) كم عدد الطلاب المهتمين باليوجا أو الدراجة الثابتة ولكن غير مهتمين بتمارين البيلاتس؟
   (b) كم عدد الطلاب المهتمين بالفعل بدرسين من الدروس الثلاثة؟
   (c) كم عدد الطلاب المهتمين باليوجا وغير مهتمين بتمارين البيلاتس؟

9. خلال فصل دراسي واحد في الكيمياء، رسب 14 طالبًا بسبب قلّة الحضور ورسب 23 طالبًا بسبب عدم المذاكرة ورسب 15 طالبًا بسبب عدم تسليم الواجبات ورسب 9 طلاب بسبب قلّة الحضور وعدم المذاكرة ورسب 8 طلاب بسبب عدم المذاكرة وعدم تسليم الواجبات ورسب 5 طلاب بسبب قلّة الحضور وعدم تسليم الواجبات ورسب 2 من الطلاب بسبب هذه الأسباب الثلاثة جميعًا.
   (a) كم عدد الطلاب الذين رسبوا نظرًا لسببين تحديدًا من الأسباب الثلاثة؟
   (b) كم عدد الذين رسبوا بسبب قلّة الحضور وعدم المذاكرة وليس بسبب عدم تسليم الواجبات؟

(c) كم عدد الذين رسبوا نظرًا لسبب واحد تحديدًا من الأسباب الثلاثة؟

(d) كم عدد الذين رسبوا بسبب قلّة الحضور وعدم تسليم الواجبات وليس بسبب عدم المذاكرة؟

10. وفق مسح أجرته مؤسسة ناشونال بيتزا والذي قمت بترتيبه الآن، من بين 109 من العملاء الذين شملهم المسح، يفضّل 32 عميلًا البيتزا بلحم البيروني البقري فقط ويفضلها 40 عميلًا بنقانق الديك الرومي فقط ويفضلها 18 عميلًا بالبصل فقط. يفضل ثلاثة عشر من محبي اللحوم بشكل كبير لحم البيروني البقري ونقانق الديك الرومي ويفضل 10 عملاء نقانق الديك الرومي والبصل ويفضل 9 عملاء لحم البيروني البقري والبصل؛ في كل حالة، يمكن إضافة الصنف الثالث أيضًا. يخرج سبعة أشخاص جميعًا، ويطلبون الأنواع الثلاثة.

(a) كم عدد العملاء الذين يفضلون لحم البيروني البقري أو نقانق الديك الرومي أو لحم البيروني البقري ونقانق الديك الرومي من دون بصل؟

(b) ماذا عن نقانق الديك الرومي أو البصل أو نقانق الديك الرومي والبصل من دون لحم البيروني البقري؟

(c) كم عدد الذين سيتبعون النهج الممل—وجبات خالية من أي من تلك الإضافات؟

11. سجل مئتا مريض يعانون من الاكتئاب في تجربة سريرية لاختبار آثار مضادات الاكتئاب المختلفة. أُعطي العقار A لـ 27% من المرضى وأُعطي العقار B لـ 30% وأُعطي العقار C لـ 27%. تمت معالجة ثلاثة عشر بالمئة باستخدام العقارين A وB على الأقل وأُعطي 11.5% العقارين B وC على الأقل وأُعطي 7% العقارين A وC على الأقل وتمت معالجة 4% بالعقاقير الثلاثة جميعًا.

(a) كم عدد المرضى في التجربة الذين أُعطوا عقارين على الأكثر من العقاقير الثلاثة؟

(b) كم عدد المرضى الذين تمت معالجتهم بالعقارين A وC دون استخدام العقار B؟

(c) كم عدد المرضى الذين أُعطوا دواءً وهميًا لا يتضمن أيًّا من العقاقير الثلاثة؟

12. وضّح مسح شمل 96 طالبًا في الحرم الجامعي أن 29 طالبًا قرؤوا جريدة الطلبة المسماة *منبر الحرم الجامعي* في ذلك الصباح، وقرأ 24 طالبًا الأخبار عبر الإنترنت في ذلك الصباح وقرأ 20 طالبًا جريدة المدينة المحلية في ذلك الصباح. قرأ ثمانية طلاب جريدة *منبر الحرم الجامعي* والأخبار عبر الإنترنت في ذلك الصباح بينما قرأ أربعة طلاب الأخبار عبر الإنترنت والجريدة المحلية وقرأ سبعة طلاب جريدة *منبر الحرم الجامعي* وجريدة المدينة المحلية وقرأ شخصٌ واحدٌ جريدة *منبر الحرم الجامعي* والأخبار عبر الإنترنت والجريدة المحلية.

(a) كم عدد من قرأ الأخبار عبر الإنترنت أو الجريدة المحلية وليس كلتيهما؟

(b) كم عدد من قرأ الأخبار عبر الإنترنت والجريدة المحلية ولم يقرؤوا جريدة *منبر الحرم الجامعي*؟

(c) كم عدد من قرأ الأخبار عبر الإنترنت أو جريدة *منبر الحرم الجامعي* أو كلتيهما؟

13. من بين أكبر 50 مدينة في الولايات المتحدة، 11 مدينة لكل منها فريقٌ في الرابطة الوطنية لكرة السلة ولكن ليس لديها فريقٌ في دوري البيسبول الرئيس؛ و9 مدن لدى كل منها فريقٌ في دوري البيسبول الرئيس ولكن ليس لديها فريقٌ في الرابطة الوطنية لكرة السلة؛ و12 مدينة لا تملك هذا ولا ذاك.

(a) كم عدد المدن التي لدى كل منها فريقٌ في دوري البيسبول الرئيس وفريقٌ في الرابطة الوطنية لكرة السلة؟

(b) تمتلك كل مدينة من شيكاغو ونيويورك ولوس أنجلوس فريقين للبيسبول، ولكن لوس أنجلوس هي المدينة الوحيدة التي لها فريقان لكرة السلة. كل مدينة من تلك المدن لها فريق في كلا الدوريين. كم عدد الفرق الموجودة في كل دوري؟

14. يصدر مئة كتاب جديد على المستوى الوطني على مدار 3 أيام من النشاط المتواصل في ديسمبر. ثمة ثمانية كتب لها نسخة إلكترونية متاحة على موقع Amazon فقط و5 كتب متاحة على موقع كتب Google فقط و18 كتابًا متاحًا على موقع iTunes فقط. وكان هناك إجمالي 26 كتابًا متاحًا على Google و7 كتب يمكن العثور عليها على Amazon وGoogle معًا ولكنها غير موجودة على iTunes و4 كتب يمكن العثور عليها على iTunes وGoogle معًا ولكنها غير موجودة على Amazon. ارسم مخطط فِن *Venn* يمثل هذه المعلومات واستخدمه للإجابة عن الأسئلة التالية.

(a) كم عدد الكتب المتاحة على المواقع الثلاثة جميعًا؟

(b) اشرح لماذا لا يمكنك إيجاد عدد الكتب التي لم تكن متاحة على أي من الخدمات الثلاث.

(c) إذ كان كل كتاب تم إصداره متاحًا في صورة كتاب إلكتروني على موقع واحد من Amazon أوGoogle أو iTunes على الأقل، فكم عدد الكتب التي كانت متاحة على Amazon وiTunes وليست متاحة على Google؟

(d) في تلك الحالة، كم عدد الكتب التي كانت متاحة على موقعين تحديدًا من المواقع الثلاثة هذه؟

15. توظف شركة تسويق موظفين لإجراء أبحاث حول عادات الاستماع لدى السائقين في منطقة حضرية كبيرة. في اليوم الأول، أُجري مسح شمل 121 سائقًا؛ يستمع 26 سائقًا إلى راديو FM أثناء القيادة، 4 منهم يستمعون إلى FM فقط. ويستمع ثمانية آخرون إلى راديو FM وAM فقط، بينما يستمع 4 إلى FM والراديو الفضائي فقط. وثمة 6 سائقين يستمعون إلى راديو AM فقط ويستمع 22 سائقًا إلى الراديو الفضائي ويستمع 69 إلى نوع واحد فقط على الأقل من الثلاثة.

(a) هل عدد من يستمع إلى الراديو الفضائي أكثر أم عدد من لا يستمع إلى أي نوع من الأنواع الثلاثة الواردة في المسح أكثر؟

(b) كم يزيد عدد الأشخاص الذين يستمعون إلى راديو AM عن أولئك الذين يستمعون إلى FM؟

(c) كم عدد المستمعين إلى بعض أنواع الراديو، لكن ليس راديو AM؟

# مجموعة التمارين يتبع

16. صُنفت مجتمعات الفنون في 230 مدينة في جميع أنحاء البلاد وفق ما إذا كان بها متحفٌ فنيٌ وأوركسترا سيمفونية وفرقة باليه. كان ثمة 119 مدينة بها متحفٌ فنيٌ؛ 20 منها بها فرقة باليه كذلك لكن لا توجد بها أوركسترا و41 مدينة بها أوركسترا لكن لا توجد بها فرقة الباليه و30 مدينة لا يوجد فيها أي من ذلك. من بين 75 مدينة بها فرقة باليه، 10 منها بها أوركسترا كذلك، لكن لا يوجد بها متحفٌ فنيٌ. اثنان وعشرون مدينة يوجد بها أوركسترا فقط.
    (a) ما النسبة المئوية للمدن التي توجد بها أوركسترا؟
    (b) كم يزيد عدد المدن التي لا يوجد بها أي من هذه الأشياء الثلاثة عن التي يوجد بها جميعها؟
    (c) إذا اخترت مدينة عشوائيًا من هذه القائمة للسفر إليها وتريد حقًا الذهاب إما إلى متحف فني أو حفلة أوركسترا، فما النسبة المئوية لاحتمال إصابتك بخيبة أمل في نهاية الأمر؟

## التفكير الناقد

17. تم توظيف باحث لدراسة عادات الشرب لدى مستهلكي مشروب الشاي. اشرح لماذا تم فصله عندما نشر النتائج التالية، من مسح شمل 40 من هؤلاء المستهلكين:
    قال 23 إنهم يشربون الشاي الأسود.
    قال 18 إنهم يشربون الشاي الأخضر.
    قال 19 إنهم يشربون الشاي العشبي.
    قال 12 إنهم يشربون الشاي الأسود والشاي الأخضر.
    قال 6 إنهم يشربون الشاي الأخضر والشاي العشبي.
    قال 7 إنهم يشربون الشاي الأسود والشاي العشبي.
    قال 2 إنهم يشربون الأنواع الثلاثة جميعًا.
    قال 2 إنهم لا يشربون أيًا من الأنواع الثلاثة.

18. قامت شركة OUWant12 للأبحاث التسويقية بتصميم ثلاثة إعلانات عشوائية وإرسالها إلى 40 حساب بريد إلكتروني. كان الإعلان الأول عن كريم إزالة الشعر والثاني إعلان عن علاجات للصداع النصفي والثالث إعلان عن نظام غذائي جديد من فاصولياء ليما. اشرح لماذا توقفت الجهات الراعية عن تقديم خدماتها عند ظهور النتائج التالية.
    حذف 23 مستلمًا إعلان كريم إزالة الشعر دون النظر إليه.
    حذف 18 مستلمًا إعلان علاجات الصداع النصفي.
    حذف 19 مستلمًا إعلان النظام الغذائي من فاصولياء ليما.
    حذف 12 مستلمًا إعلاني كريم إزالة الشعر وعلاجات الصداع النصفي.
    حذف 6 مستلمين إعلاني علاجات الصداع النصفي والنظام الغذائي من فاصولياء ليما.
    حذف 7 مستلمين إعلاني كريم إزالة الشعر والنظام الغذائي من فاصولياء ليما.
    حذف 2 من المستلمين الإعلانات الثلاثة جميعًا.

19. تقوم شبكة تلفزيونية تفكر في إبرام عقود جديدة لبث قنوات رياضية بتوظيف مستشار تسويق لإجراء مسح يشمل مشاهدي تلفاز تم اختيارهم عشوائيًا لسؤالهم عن الرياضة التي يسعون جاهدين لمشاهدتها عبر التلفاز من بين كرة القدم والتنس وكرة السلة. ومن بين من شملهم المسح، يشاهد 35 التنس و235 كرة السلة و295 كرة القدم ويشاهد 90 كرة السلة وكرة القدم و560 لا يشاهدون أيًا من الثلاثة.
    (a) اشرح لماذا لا تُعد هذه المعلومات كافية لإيجاد إجمالي عدد الأشخاص الذين شملهم المسح.
    (b) عند النظر إلى النتائج بعناية أكثر، يكتشف أحد أعضاء الفريق الاستشاري أن كل شخص يشاهد التنس يشاهد كرة السلة كذلك، ولا يشاهد أيٌ من هؤلاء الأشخاص كرة القدم. هل يمكنك الآن إيجاد عدد الأشخاص الذين شملهم المسح؟
    (c) كم شخصًا يشاهد كرة القدم فقط؟ كم شخصًا يشاهد كرة السلة فقط؟

20. (a) ما عدد المناطق المختلفة الموجودة في مخطط فِن *Venn* مكوَّن من دائرتين؟ ماذا عن المخطط المكوَّن من ثلاث دوائر؟ استخدم هذا لتكوين تخمين بشأن عدد المناطق اللازمة لمخطط فِن *Venn* من أربع دوائر.
    (b) قم ببعض المحاولات لرسم مخطط فِن *Venn* بأربع دوائر، ثم اشرح لماذا يتعذر ذلك.
    (c) استخدم الإنترنت لإيجاد مخطط فِن *Venn* لأربع مجموعات، واستخدمه للتحقق من تخمينك من الجزء (a).

الدرس 5-5

# المجموعات غير المنتهية

## أهداف التعلم

1 تعريف المجموعات غير المنتهية.

2 توضيح أن مجموعة ما غير منتهية.

3 إيجاد حد عام لمجموعة غير منتهية.

4 تعريف المجموعات القابلة للعد وغير القابلة للعد.

قد تبدو السماء ليلًا غير منتهية، ولكن هل فكرت مطلقًا في معنى ذلك حقًا؟

يُعد مفهوم اللانهاية بالغ الصعوبة بالنسبة إلينا كبشر لتدركه عقولنا. ولأن أفكارنا تتشكل من خلال التجارب في عالم مادي محدود الأبعاد، فإن الأشياء الكبيرة بصورة غير منتهية تبدو دائمًا بعيدة عن متناولنا. يشعر بعض الفلاسفة أن البشر عاجزون بشكل أساسي عن فهم مفهوم الشيء الكبير بصورة غير منتهية على الإطلاق!

إن دراسة اللانهاية والمجموعات غير المنتهية من منظور الرياضيات تُعد حديثة نسبيًا إذا ما قورنت بتاريخ الرياضيات بشكل عام. فمنذ مدة لا تقل عن ألفَي سنة، كانت طبيعة اللانهاية مربكة بدرجة كبيرة لأعظم العقول البشرية الذين اختاروا عدم التطرق لها على الإطلاق. ومع ذلك، ففي العمل في مجموعة تكون ببساطة الأرقام الطبيعية، فإننا نتعامل مع مجموعات غير منتهية في الرياضيات طوال الوقت. إنها مفارقة مثيرة للاهتمام.

## تعريف المجموعات غير المنتهية

تذكر من الدرس 1 أن المجموعة تُعد منتهية إذا كان عدد العناصر إما صفرًا أو عددًا طبيعيًا. وإلا، فستُعد مجموعة غير منتهية. على سبيل المثال، تُعد المجموعة $\{10, 20, 30, 40\}$ منتهية لأن عدد العناصر (أربعة) عدد طبيعي. لكن المجموعة $\{10, 20, 30, 40, \ldots\}$ غير منتهية لأن عدد العناصر غير محدد، ومن ثم لا يكون عددًا طبيعيًا.

قد تتعرف على المجموعة غير المنتهية عندما ترى إحداها، لكن ليس من السهل بالضرورة أن تقدم تعريفًا دقيقًا لما يعنيه كون المجموعة غير منتهية (غير التعريف الواضح، "غير منتهية"). يشتهر عالم الرياضيات الألماني جورج كانتور، الذي يُعد على نطاق واسع أبًا لنظرية المجموعات، بدراسة المجموعات غير المنتهية التي أجراها في القرن التاسع عشر. وقد أتى تعريف كانتور البسيط والأنيق للمجموعة غير المنتهية كما يلي:

تكون المجموعة **غير منتهية** إذا أمكن وضعها في تناظر واحد لواحد مع المجموعة الجزئية الفعلية الخاصة بها.

أولًا، لاحظ أن المجموعة المنتهية لا تفي بالتأكيد بالشرط الوارد في هذا التعريف؛ إذا كانت المجموعة تحتوي على عدد محدد من العناصر، وليكن 10، فإن أي مجموعة جزئية فعلية تحتوي على 9 عناصر على الأكثر ومحاولة وضع تناظر واحد لواحد ستخلّف دائمًا عضوًا واحدًا على الأقل.

والشيء الأصعب هو استيعاب كيف يمكن للمجموعة غير المنتهية أن تحقق هذا التعريف. سنوضّح ذلك باستخدام مجموعة غير منتهية نعرفها جيدًا، مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ هي مجموعة جزئية فعلية؛ كل عدد زوجي هو عدد طبيعي كذلك، لكن توجد أعداد طبيعية ليست أعدادًا زوجية. الآن، سنوضح طريقة ماهرة لوضع هاتين المجموعتَين في تناظر واحد لواحد؛ توصيل كل عدد طبيعي بمثلَيه.

$$1 \leftrightarrow 2, \quad 2 \leftrightarrow 4, \quad 3 \leftrightarrow 6, \quad 4 \leftrightarrow 8, \ldots$$

بشكل عام، يمكننا تحديد مقابلتنا بتوصيل أي $n$ من مجموعة الأعداد الطبيعية بعدد زوجي مقابل $2n$. ويُعد ذلك تناظر واحد لواحد لأن كل عدد طبيعي له مقابل (مثلاه)، وكل عدد زوجي له مقابل (نصفه).

1. تعريف المجموعات غير المنتهية رسميًا.

### ملاحظة رياضية

فكر فيما يلي لمدة ثانية؛ أي المجموعتين أكبر، $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ أم $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$؟ غالبًا أي شخص عاقل سيقول إن الأولى هي الأكبر، أليس كذلك؟ لكن المناقشة الموجودة على اليسار توضّح أنهما متساويتان في الحجم بالفعل.

ومن ثم نكون قد وضعنا الأعداد الطبيعية في تناظر واحد لواحد مع مجموعة جزئية فعلية، ما يثبت أنها مجموعة غير منتهية.

لنجرب مثالًا آخر.

## معلومات إضافية الفندق غير المنتهي

بفرض أن هناك فندقًا هائلًا جدًا في إحدى المجرات البعيدة يتضمن بالفعل عددًا لا نهائيًا من الغرف، مرقّمة على النحو .... ,4 ,3 ,2 ,1 هناك اجتماع كبير بين مخلوقات غريبة ومروعة في المدينة، لذلك جميع الغرف مشغولة. يدخل مسافر منهك إلى الردهة ويطلب غرفة، وعندما يعلم أن الفندق ممتلئ، يحتج بأن الفندق يمكن أن يستوعبه بالتأكيد. هل تتفق معه؟ هل يمكنهم العثور على غرفة له دون طرد شخص ما؟

يميل الأشخاص إلى الانقسام بشأن هذا السؤال إلى نصفين: يعتقد نصفهم أنه لا يمكنهم استيعابه لأن جميع الغرف ممتلئة، ويعتقد النصف الآخر أنه يمكنهم ذلك لأن هناك العديد من الغرف غير المنتهية. في الحقيقة، المسافر مُحقّ—فالأمر لا يتطلب سوى إزعاج جميع النزلاء الآخرين! إذا طلب المدير من كل نزيل الانتقال إلى الغرفة التي يزيد رقمها بمقدار 1 عن رقم غرفته الحالية، فإن كل شخص كان في الأصل في غرفة لا يزال يمتلك غرفة، ويستطيع مسافرنا إراحة جسده المرهق في الغرفة 1.

هذا التمرين العقلاني الذكي الصغير هو نتيجة للحقيقة التي تفيد أن الأعداد الطبيعية تشكل مجموعة غير منتهية—يمكن وضعها في تناظر واحد لواحد مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها عن طريق مقابلة أي $n$ بـ $n + 1$.

وضّح أن المجموعة {. . . ,25 ,20 ,15 ,10 ,5} هي مجموعة غير منتهية.

### مثال 1 توضيح أن مجموعة ما غير منتهية

**الحل**

ثمة طريقة بسيطة لوضع هذه المجموعة في مقابلة مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها وهي مطابقة كل عنصر $n$ مع مِثليه $2n$:

$$\begin{array}{c}\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \ldots\}\\ \updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\\ \{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ \ldots\}\end{array}$$

المجموعة الثانية، {. . . ,50 ,40 ,30 ,20 ,10} هي مجموعة جزئية فعلية من المجموعة الأولى، والمجموعتان في تناظر واحد لواحد، لذا {. . . ,25 ,20 ,15 ,10 ,5} هي مجموعة غير منتهية.

### جرّب هذا 1

وضّح أن المجموعة {. . . ,5− ,4− ,3− ,2− ,1−} هي مجموعة غير منتهية.

## الحد العام للمجموعة غير المنتهية

2. توضيح أن مجموعة ما غير منتهية.

تتمثل إحدى نتائج الطريقة التي أظهرنا بها أن مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية في أننا يمكننا إيجاد صيغة عامة لمجموعة الأعداد الزوجية: $2n$، حيث $n$ هي المجموعة {. . . ,4 ,3 ,2 ,1}. سنسمي $2n$ في هذه الحالة **حدًا عامًا** لمجموعة الأعداد الزوجية. لاحظ أننا قلنا "حد عام" وليس "الحد العام". فثمة حدود عامة أخرى يمكننا كتابتها لهذه المجموعة: $2n - 6$، حيث $n$ هي المجموعة {. . . ,7 ,6 ,5 ,4}، يُعد احتمالًا آخر. لكن في معظم الحالات يكون الحد العام الأبسط هو الحد الذي يتم الحصول على العدد الأول المذكور فيه بالتعويض بـ 1 عن $n$، وهذا هو الحد الذي سنجده عادةً.

## مثال 2 إيجاد الحد العام لمجموعة غير منتهية

جـد حدًا عامًا للمجموعة {. . . ,16 ,13 ,10 ,7 ,4}.

### الحل

يجب أن نبدأ دومًا بمحاولة التعرف على نمط متبع في أعداد المجموعة. في هذه الحالة، النمط هو زيادة الأعداد بمعدل 3. عندما تكون الحالة كذلك، فإن $3n$ يمثل خيارًا جيدًا، لأنه عندما تزداد $n$ بمعدل 1، تزداد $3n$ بمعدل 3. ولكن مجرد استخدام $3n$ سيمنحنا المجموعة {. . . ,12 ,9 ,6 ,3}، التي لا تمثل ما نريده بالتحديد. نعالج ذلك بإضافة 1 إلى الحد العام الخاص بنا، للحصول على $3n + 1$. (نحثك على التحقق من تلك الإجابة بالتعويض بالقيم . . . ,3 ,2 ,1 عن $n$ لتلاحظ أن النتيجة هي المجموعة {. . . ,16 ,13 ,10 ,7 ,4}.)

**ملاحظة رياضية**

لا يعد إيجاد حد عام لمجموعة أمرًا سهلًا دومًا. في بعض الحالات، قد يكون أمرًا بالغ الصعوبة أو مستحيلًا. فقد نحتاج إلى إجراء بعض المحاولات وارتكاب الأخطاء قبل إيجاد صيغة صحيحة.

## جرّب هذا 2

جـد حدًا عامًا للمجموعة {. . . ,26 ,20 ,14 ,8 ,2}.

## أنواع اللانهاية المختلفة؟

3. إيجاد حد عام لمجموعة غير منتهية.

سريعًا، ما المجموعة الأكبر، مجموعة الأعداد الطبيعية أم مجموعة الأعداد الحقيقية؟ من المحتمل أن تكون قد أجبت بمجموعة الأعداد الحقيقية. لكن كلتا المجموعتين كبيرة بصورة غير منتهية، أليستا متساويتين في الحجم إذن؟ لقد واجه كانتور هذه المسألة في أواخر القرن التاسع عشر. وحدد أن المجموعة تكون **قابلة للعد** إذا كانت منتهية أو يمكن وضعها في تناظر واحد لواحد مع الأعداد الطبيعية، وأن المجموعة غير المنتهية تكون **غير قابلة للعد** إذا تعذر ذلك. واستخدم الرمز $\aleph_0$، ويُنطق ألف-صفر، لتمثيل عدد العناصر الرئيسة للمجموعة القابلة للعد.

## مثال 3 توضيح أن مجموعة ما قابلة للعد

وضّح أن مجموعة الأعداد الصحيحة قابلة للعد.

### الحل

إذا كانت مجموعة هي مجموعة منتهية، فإنها قابلة للعد تلقائيًا، لذلك فإن ذلك يستحق التفكير على الأقل. ولكن الأعداد الصحيحة ليست مجموعة منتهية، لذلك نحتاج إلى إيجاد طريقة لوضعها في تناظر واحد لواحد مع أعداد طبيعية. يمكننا مطابقة 0 مع 1، و1 مع 2، و2 مع 3 وهكذا، ولكن ذلك سيهمل الأعداد السالبة. لذلك فلنتخيل الأمر بصورة أشمل:

| الأعداد الطبيعية | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | . . . |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الأعداد الصحيحة | 0 | 1 | −1 | 2 | −2 | 3 | −3 | 4 | −4 | . . . |

يُعد هذا صحيحًا لأننا يمكننا ملاحظة أن كل عدد صحيح سيقابله عدد طبيعي في النهاية، لذلك يحدد ذلك تناظر واحد لواحد. بالرغم من ذلك، سيكون الإثبات أقوى إذا تمكنا من تحديد صيغة للتناظر. لكل عدد طبيعي $n$،

$$n \rightarrow \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \\ -\dfrac{n-1}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \end{cases}$$

يحدد تناظر واحد لواحد.

## معلومات إضافية القصة الحزينة للرجل الذي كان ذا بصيرة

الشخص الذي صاغ عبارة "العبقرية الحقيقية لا تُدرك مطلقًا في الوقت المناسب" كان سيحب جورج كانتور. إن مجرد أن تشتهر بكونك مؤسسًا لما يمثل الآن فرعًا رئيسًا في الرياضيات (نظرية المجموعات) يُعد إنجازًا عظيمًا، ولكن الأمر كان يتعلق بقدرة كانتور الفريدة على إضفاء الطابع الرسمي على دراسة اللانهاية التي كانت أعظم إنجازاته، وفي النهاية مثلت اللعنة الأكبر له.

لقرون عديدة، تجاهلت دراسة الرياضيات بشكل أساسي حقيقة أن أعمدتها الأساسية—الأعداد الطبيعية والحقيقية—كانت مجموعات غير منتهية؛ ببساطة لم تتم دراسة اللانهاية. بالنسبة إلى الجزء الأكبر، كان هذا يعزى إلى المعتقدات الدينية—وكان يعتقد أن اللانهاية هو عالم يخص الله وحده، واعتبرت محاولات دراستها علميًا أمرًا غير لائق من قبل البعض وبدعة صريحة من قبل آخرين. وعلى أقل تقدير، لم يتم الاحتفاء بعمل كانتور وقت صدوره. كان اثنان من أكبر منتقدي كانتور كذلك من بين أشهر علماء الرياضيات في أواخر القرن التاسع عشر، هنري بوانكاريه وليوبلد كرونكر. أشار بوانكاريه إلى عمل كانتور على أنه "مرض خطير يصيب الرياضيات". ومن الواضح أن كرونكر فضّل الهجمات الشخصية، واصفًا كانتور بأنه "دجال علمي" و"مرتد" و"مفسد الشباب". وكان هذا من جانب علماء الرياضيات—شعر الفلاسفة الدينيون أنه يجب سجنه أو أسوأ من ذلك.

أثقل ذلك النقد كاهل جورج المسكين بشدة، حيث دخل المستشفى لأول مرة بسبب الاكتئاب الحاد في عام 1884 بعد 10 سنوات من العمل التأسيسي في نظرية المجموعات. على الرغم من أنه ظل ناشطًا كعالم رياضيات حتى عام 1913، إلا أنه كان ينضم إلى المؤسسات ويرحل منها بسرعة، وقضى آخر 5 سنوات من حياته في مصحة حتى مات في عام 1918.

لكن صدّق أو لا تصدق، كان يمكن أن يكون الوضع أسوأ من ذلك. يمكن أن ترجع جذور الأفكار التي نقبلها الآن عن اللانهاية إلى الفيلسوف الإيطالي وعالم الرياضيات وعالم الفلك جوردانو برونو، الذي تمت مكافأته على فهمه الرائد للطبيعة اللانهائية للكون بحرقه على الوتد في 17 فبراير 1600.

## جرّب هذا 3

وضّح أن مجموعة الأعداد النسبية الموجبة ذات المقامات 2 أو 3 هي مجموعة قابلة للعد. (الأعداد النسبية هي كسور ذات أعداد صحيحة في البسط والمقام.)

4. تعريف المجموعات القابلة للعد وغير القابلة للعد.

الآن يكون السؤال الذي يطرح نفسه هو: ما أنواع المجموعات غير القابلة للعد؟ وكيف يمكنك إثباتها؟ هذا، يا أصدقائي، ليس سؤالًا سهلًا على الإطلاق. لقد كان أحد أهم إنجازات كانتور، في الحقيقة، هو إثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية ليست قابلة للعد. فإذا كنت قد خمّنت إذن أن الأعداد الحقيقية أكبر من الأعداد الطبيعية، فأنت محق. لكن دراسة المجموعات غير المنتهية غريبة وشيقة في آن واحد، حيث النتائج غير المتوقعة في كل محاولة تقريبًا. فمثلًا، يمكن إثبات أن عدد العناصر الرئيسة لمجموعة من الأعداد التي بين 0 و1 فقط هو نفسه عدد العناصر الرئيسة لمجموعة الأعداد الحقيقية بالكامل! إذا وجدت هذه الأفكار مشوقة، فستحصل على المزيد منها في المشروعَين 3 و4 في نهاية هذه الوحدة.

## إجابات جرّب هذا

1 يمكن حلها بطرقٍ عديدة: أحد الخيارات هو تناظر 1− بـ 2− و2− بـ 4−، وبوجه عام $-n$ بـ $-2n$.

2 $6n - 4$

3 احتمال واحد:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3}\ldots \end{array}$$

$n \to \begin{cases} \dfrac{(n+1)/2}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \\ \dfrac{n/2}{3} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \end{cases}$ أو $n \to \begin{cases} \dfrac{(n+1)}{4} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \\ \dfrac{n}{6} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \end{cases}$

# مجموعة التمارين

## تمارين كتابية

1. عرّف المجموعة المنتهية، بكلمات من عندك وباستخدام تعريف كانتور كذلك.
2. ما المقصود بالحد العام لمجموعة غير منتهية؟
3. ماذا يعني أن تكون مجموعة ما قابلة للعد؟
4. اشرح كيف يمكنك معرفة أن مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الزوجية تتضمنان عدد العناصر الرئيسة نفسه.

## تمارين حسابية

*بالنسبة إلى التمارين 20-5، جـد حدًا عامًا للمجموعة.*

5. $\{7, 14, 21, 28, 35, \ldots\}$
6. $\{1, 8, 27, 64, 125, \ldots\}$
7. $\{4, 16, 64, 256, 1{,}024, \ldots\}$
8. $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
9. $\{-3, -6, -9, -12, -15, \ldots\}$
10. $\{22, 44, 66, 88, 110, \ldots\}$
11. $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots\}$
12. $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \ldots\}$
13. $\{2, 6, 10, 14, 18, \ldots\}$
14. $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$
15. $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots\}$
16. $\{1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \ldots\}$
17. $\{100, 200, 300, 400, 500, \ldots\}$
18. $\{50, 100, 150, 200, 250, \ldots\}$
19. $\{-4, -7, -10, -13, -16, \ldots\}$
20. $\{-3, -5, -7, -9, -11, \ldots\}$

*بالنسبة إلى التمارين 30-21، وضّح أن كل مجموعة هي مجموعة غير منتهية.*

21. $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
22. $\{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$
23. $\{9, 18, 27, 36, 45, \ldots\}$
24. $\{4, 10, 16, 22, 28, \ldots\}$
25. $\{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$
26. $\{20, 24, 28, 32, 36, \ldots\}$
27. $\{10, 100, 1{,}000, 10{,}000, \ldots\}$
28. $\{100, 200, 300, 400, 500, \ldots\}$
29. $\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \ldots\}$
30. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$

*بالنسبة إلى التمارين 34-31، وضّح أن المجموعة المعطاة قابلة للعد. (انظر المثال 3 للاسترشاد.)*

31. $\{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$
32. $\{-3, -6, -9, -12, -15, -18, \ldots\}$
33. مجموعة الأعداد التي جذرها التربيعي عددٌ كليٌّ
34. مجموعة الأعداد النسبية السالبة ذات المقامين 5 و7

## التفكير الناقد

35. مجموعة الأعداد النسبية هي مجموعة تتضمن جميع الكسور المحتملة التي تكون قيم البسط والمقام لها أعدادًا صحيحة. بديهيًا، هل تعتقد أنه توجد أعداد نسبية أكثر من الأعداد الطبيعية؟ لماذا؟ هل تعتقد أن مجموعة الأعداد النسبية قابلة للعد؟
36. هل يمكنك التفكير في أي مجموعة من الأشياء الملموسة التي تعد مجموعة غير منتهية؟ لمَ أو لمَ لا؟
37. ادرس المثال 3 بعناية، ثم قارنه بالمثال 2. ما الذي أثبتناه بالفعل في المثال 2 من دون حتى إدراك ذلك؟
38. صواب أم خطأ:
    (a) المجموعة الجزئية من مجموعة غير منتهية تكون غير منتهية.
    (b) إذا كانت المجموعة $A$ تتضمن مجموعة جزئية غير منتهية، فإن $A$ يجب أن تكون غير منتهية كذلك.

*يستخدم التمرينان 39 و40 الحقيقة التي تفيد أن عدد العناصر الرئيسة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ هو $\aleph_0$.*

39. (a) حدد التناظر واحد لواحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية والمجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
    (b) اكتب مسألة حسابية تتضمن $\aleph_0$ الموضح بواسطة الجزء (a). (*إرشاد:* كم عدد العناصر الزائدة عن الأعداد الطبيعية التي تتضمنها المجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$؟)
40. (a) حدد التناظر واحد لواحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة جميع الأعداد الصحيحة باستثناء الصفر.
    (b) اكتب مسألة حسابية تتضمن $\aleph_0$ الموضح بواسطة الجزء (a).

*في التمارين 46-41، جـد المجموعة الرئيسة للمجموعة المعطاة. ربما تجد الأفكار الواردة في التمرينين 39 و40 مفيدة.*

41. $\{10, 11, 12, 13, 14, \ldots\}$
42. $\{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$
43. $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 29\}$
44. $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 24\}$
45. مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.
46. مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.

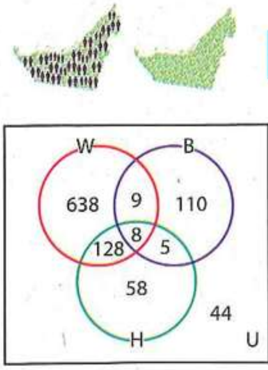
# 5-5 الملخص

| الدرس | مصطلحات مهمة | أفكار مهمة |
|---|---|---|
| 1 | المجموعة<br>طريقة ذكر العناصر<br>العنصر<br>محددة جيدًا<br>الأعداد الطبيعية<br>الطريقة الوصفية<br>رمز بناء المجموعة<br>المتغير<br>مجموعة منتهية<br>مجموعة غير منتهية<br>عدد رئيس<br>مجموعة خالية<br>مجموعات متساوية<br>مجموعات متكافئة<br>التناظر واحد لواحد | **المجموعة** هي مجموعة من العناصر؛ وتكون المجموعة محدودة إذا كان يمكن الجزم بموضوعية أن أي عنصر ينتمي إلى المجموعة أو لا ينتمي إليها. يسمى كل شيء عنصرًا أو عضوًا في المجموعة.<br>نستخدم ثلاث طرق لتحديد المجموعات: طريقة ذكر العناصر والطريقة الوصفية ورمز بناء المجموعة.<br>تتضمن المجموعة المنتهية عدد محدود من العناصر، بينما تتضمن المجموعة غير المنتهية عدد غير محدود من العناصر. إذا كانت المجموعة لا تتضمن أي عناصر، فتسمى مجموعة خالية أو مجموعة فارغة.<br>تكون المجموعتان متساويتين إذا كانتا تتضمنان العناصر نفسها، وتكون المجموعتان المنتهيتان متكافئتين إذا كانتا تتضمنان عدد العناصر نفسه. تسمى المجموعتان في حالة تناظر واحد لواحد إذا كان من الممكن إقتران العناصر بحيث يكون لكل عنصر في المجموعة الأولى عنصر مناظر تمامًا في المجموعة الثانية، والعكس. |
| 2 | المجموعة الشاملة<br>متممة<br>المجموعة الجزئية<br>المجموعة الجزئية الفعلية<br>التقاطع<br>الاتحاد<br>الطرح<br>الضرب الديكارتي | **المجموعة الشاملة** هي مجموعة تضم كافة العناصر المستخدمة لمسألة أو حالة محددة.<br>المجموعة المتممة لمجموعة محددة هي مجموعة تتألف من جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة وليست في المجموعة المحددة.<br>تسمى المجموعة $A$ مجموعة جزئية من المجموعة $B$ إذا كان كل عنصر في $A$ موجودًا كذلك في $B$. تُسمى $A$ مجموعة جزئية فعلية للمجموعة $B$ إذا وجد عنصر واحد على الأقل في $B$ غير موجود في $A$. اتحاد مجموعتين هو المجموعة التي تضم جميع العناصر الموجودة في مجموعة واحدة على الأقل من المجموعتين. التقاطع هو المجموعة التي تضم جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.<br>الفرق بين المجموعة $A$ والمجموعة $B$، يرمز إليه بـ $A - B$، هو مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة $A$ لكنها غير موجودة في المجموعة $B$. الضرب الديكارتي للمجموعتين $A$ و $B$ هو $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ و $y \in B\}$. |
| 3 | مخطط فن Venn | اخترع **عالم رياضيات** اسمه **جون فِن** طريقة لتمثيل المجموعات بشكل تصويري. يستخدم أسلوبه الدوائر المتداخلة لتمثيل المجموعات. توضع العناصر الموجودة ضمن تقاطع المجموعات في موضع تداخل الدوائر.<br>قوانين دي مورجان لمجموعتين $A$ و $B$ هي $(A \cup B)' = A' \cap B'$ و $(A \cap B)' = A' \cup B'$. لأي مجموعتين منتهيتين $A$ و $B$، $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. |
| 4 | | يمكن استخدام **مخططات فِن Venn** لحل مسائل في عالمنا تتضمن عمليات المسح والتصنيفات. |
| 5 | مجموعة غير منتهية<br>الحد العام<br>مجموعة قابلة للعد<br>مجموعة غير قابلة للعد | **يمكن وضع مجموعة غير منتهية** في تناظر واحد لواحد مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها.<br>تسمى المجموعة قابلة للعد إذا كانت منتهية أو يوجد تناظر واحد لواحد بين المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية. تسمى المجموعة غير قابلة للعد إذا كان يتعذر عدها. وتعد الأعداد الطبيعة مثالًا على مجموعة غير منتهية قابلة للعد، بينما تعد الأعداد الحقيقية مجموعة غير قابلة للعد. |

## مراجعة الرياضيات في التنوع

اعتمد مخطط فِن Venn الموضّح على اليسار إلى التقديرات السكانية المقدمة:

1. البيض فقط: 638؛ السود فقط: 110؛ الأصل الإسباني فقط: 58
2. الأصل الإسباني والسود، دون البيض: 5
3. الأصل الإسباني أو السود: 318
4. غير البيض أو السود أو المنحدرين من أصل إسباني: 44
5. هذا يُعد بسيطًا إذا فكرت فيه: النسبة المئوية للبيض أقل من 50، ومن ثم سيكون غير البيض أكثر.



# 5 تمارين المراجعة

## مراجعة درس بدرس

### 5-1 مقدمة في نظرية المجموعات

*بالنسبة إلى التمارين 8–1، اكتب كل مجموعة برمز السرد.*

1. المجموعة $D$ هي مجموعة الأعداد الزوجية بين 50 و60.
2. المجموعة $F$ هي مجموعة الأعداد الفردية بين 3 و40.
3. المجموعة $L$ هي مجموعة الحروف التي تتضمنها الكلمة *خطابات*.
4. المجموعة $A$ هي مجموعة الحروف التي تتضمنها الكلمة *أركنساس*.
5. المجموعة $B$ هي $\{x|x \in N$ و $x > 500\}$.
6. المجموعة $C$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية بين 5 و12.
7. $M$ هي مجموعة الرجال الذين ساروا على سطح القمر.
8. $W$ هي مجموعة النساء اللاتي سرن على سطح القمر.

*بالنسبة إلى التمارين 12–9، اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة.*

9. $\{18, 20, 22, 24\}$
10. $\{5, 10, 15, 20\}$
11. $\{101, 103, 105, 107, \ldots\}$
12. $\{8, 16, 24, \ldots 72\}$

*بالنسبة إلى التمارين 20–13، حدد ما إذا كانت المجموعة منتهية أم غير منتهية.*

13. $\{x|x \in N$ و $x \geq 9\}$
14. $\{4, 8, 12, 16, \ldots\}$
15. {إعلانات تجارية مزعجة}
16. $\{3, 7, 9, 12\}$
17. $\emptyset$
18. {الأشخاص أصحاب الشعر الأحمر}
19. {أعداد من 10 أرقام}
20. أي من المجموعات الواردة في التمارين 19–13 ليست محددة جيدًا؟

### 5-2 المجموعات الجزئية والمجموعات على المجموعات

*بالنسبة إلى التمارين 21–24، حدد ما إذا كانت العبارة صوابًا أم خطأ.*

21. $\{80, 100, 120, \ldots\} \subseteq \{40, 80, 120, \ldots\}$
22. $\{6\} \subset \{6, 12, 18\}$
23. $\{5, 6, 7\} \subseteq \{5, 7\}$
24. $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$
25. جـد جميع المجموعات الجزئية للمجموعة $\{r, s, t\}$.
26. كم عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية التي تتضمنها المجموعة $\{a, e, i, o, u, y\}$؟

*وقع اختيار موقع ويب للاختبار التلقائي 11 سيارة لإجراء ثلاثة أنواع من اختبارات السلامة: اختبار انتفاخ الوسادة الهوائية وقوة الهيكل عند الانقلاب واختبار تصادم بسرعة 20 ميل في الساعة. تم إدراج السيارات التي حصلت على تصنيف استثنائي في انتفاخ الوسادة الهوائية في المجموعة $A$. وتضمنت المجموعة $B$ السيارات التي حصلت على تصنيف استثنائي في قوة الهيكل عند الانقلاب وتضمنت المجموعة $C$ السيارات التي حصلت على تصنيف استثنائي في اختبار التصادم. استخدم هذه المجموعات للتمارين 38–27.*

$U =$ {شيفروليه، فورد، بي إم دبليو، مرسيدس، تويوتا، هوندا، لكزس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}

$A =$ {شيفروليه، بي إم دبليو، تويوتا، هوندا، لكزس}

$B =$ {تويوتا، هوندا، لكزس، هيونداي، تسلا}

$C =$ {مرسيدس، أكيورا، دودج}

جـد كل مجموعة.

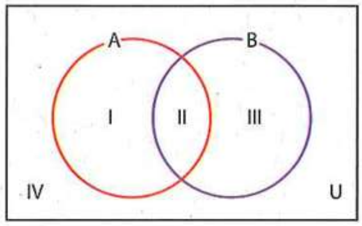
27. $A \cap B$
28. $B \cup C$
29. $(A \cap B) \cap C$
30. $B'$
31. $A - B$
32. $B - A$
33. $(A \cup B)' \cap C$
34. $B' \cap C'$
35. $(B \cup C) \cap A'$
36. $(A \cup B) \cap C'$
37. $(B' \cap C') \cup A'$
38. $(A' \cap B) \cup C$
39. إذا كان $K = \{x|x \in N, x > 25\}$ و$L = \{x|x \in E, x > 10\}$، فجـد $K \cap L$ و$K \cup L$ و$L - K$.
40. بالنسبة إلى كل رقم تمرين وارد أدناه، اكتب وصفًا لفظيًا لما تمثله المجموعة التي يتضمنها ذلك التمرين.

| | | |
|---|---|---|
| (a) 27 | (d) 30 | (g) 34 |
| (b) 28 | (e) 31 | (h) 35 |
| (c) 29 | (f) 32 | |

# تمارين المراجعة

## 5-3 استخدام مخططات فِن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

*بالنسبة إلى التمارين 46–41. استخدم مخطط فِن Venn التالي. صف المنطقة أو المناطق المقدمة في كل مسألة، باستخدام عمليات المجموعات على A وB. ربما توجد أكثر من إجابة صحيحة.*




41. المنطقة $I$
42. المنطقة $II$
43. المنطقة $III$
44. المنطقة $IV$
45. المنطقتان $I$ و$III$
46. المنطقتان $I$ و$IV$

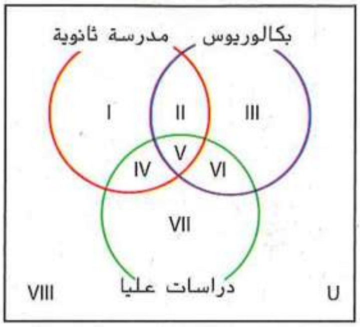
*بالنسبة إلى التمارين 50–47. ارسم مخطط فِن Venn وظلل المنطقة المناسبة لكل تمرين.*

47. $A' \cap B$
48. $(A \cup B)'$
49. $(A' \cap B') \cup C$
50. $A \cap (B \cup C)'$
51. إذا كان $n(A) = 15$ و$n(B) = 9$ و$n(A \cap B) = 4$.
فجد $n(A \cup B)$.
52. إذا كان $n(A) = 24$ و$n(B) = 20$ و$n(A \cap B) = 14$.
فجد $n(A \cup B)$.

*يُستخدم الجدول ومخطط فِن Venn التالي في التمرينات 56–53. يوضح الجدول أقل خمس ولايات في 2014 من حيث نسبة السكان الذين بلغوا مستوى محددًا من التعليم على الأقل. بالنسبة إلى كل سؤال، اكتب المنطقة في مخطط فِن Venn التي تتضمن الولاية المذكورة.*

| شهادة الدراسات العليا | شهادة البكالوريوس | متخرج من مدرسة ثانوية |
|---|---|---|
| أركنساس | ويست فرجينيا | تكساس |
| ويست فرجينيا | أركنساس | ميسيسيبي |
| داكوتا الشمالية | ميسيسيبي | كاليفورنيا |
| لويزيانا | كنتاكي | كنتاكي |
| ميسيسيبي | لويزيانا | ألاباما |

المصدر: ويكيبيديا




53. كنتاكي
54. ميسيسيبي
55. لويزيانا
56. أوهايو

## 5-4 استخدام المجموعات لحل المسائل

57. قبيل إحدى الانتخابات، شارك 250 ناخبًا في الاقتراع: صوت 155 لصالح المرشح $A$ و140 لصالح المرشح $B$ وصوت 120 لصالح كلا المرشحين.
 (a) كم عدد الذين لم يصوتوا لكلا المرشحين من ضمن من شملهم الاقتراع؟
 (b) كم عدد من صوتوا لصالح المرشح $B$؟
58. أجرى متخصص في السمع دراسة على فقدان السمع عند ترددات محددة بين مجموعة مرضى في إحدى دور الرعاية بالمسنين. من بين 94 مقيمًا خضعوا للاختبار، عانى 10 من فقدان السمع بدرجة كبيرة عند الترددات المنخفضة وليست المرتفعة وعانى 40 من فقدان السمع بدرجة كبيرة عند الترددات المرتفعة وليست المنخفضة، بينما 26 لم يظهروا أي فقدان في السمع بدرجة كبيرة على الإطلاق.
 (a) كم عدد المقيمين الذين عانوا من فقدان السمع عند الترددات المنخفضة والمرتفعة على حدٍ سواء؟
 (b) ما نسبة الذين يعانون من فقدان في السمع عند ترددات مرتفعة؟
59. سُئل ثلاثة وخمسون متصلًا بمحطة راديو الجامعة عن الذي يستمعون إليه عادةً عند الذهاب إلى الكلية بالسيارة. من بين من طرح عليهم السؤال، 22 استمعوا إلى محطة راديو محلية و18 استمعوا إلى محطة راديو فضائية و33 استمعوا إلى موسيقى عبر الإنترنت و8 استمعوا إلى محطة راديو محلية ومحطة راديو فضائية و13 استمعوا إلى محطة راديو فضائية وموسيقى عبر الإنترنت و11 استمعوا إلى محطة راديو محلية وموسيقى عبر الإنترنت و6 استمعوا إلى الثلاثة جميعًا.
 (a) كم عدد من استمعوا إلى محطة راديو فضائية فقط؟
 (b) كم عدد من استمعوا إلى محطات راديو محلية وموسيقى عبر الإنترنت لكن لم يستمعوا إلى محطة راديو فضائية؟
 (c) كم عدد من لم يستمعوا إلى أي من تلك الأشياء؟
60. وجد مدير مكتبة الجامعة أنه قبل أربع ساعات من الإغلاق، اشترى 41 طالبًا كتابين دراسيين أو أكثر. من بين هؤلاء، دفع 4 فقط نقدًا واستخدم 5 قسيمة المساعدة المالية فقط واستخدم 5 بطاقة السحب الفوري فقط. استخدم سبعة بطاقة السحب الفوري وقسيمة المساعدة المالية من دون نقد؛ واستخدم ثلاثة النقد وبطاقة السحب الفوري من دون قسيمة المساعدة المالية. استخدم ستة عشر طالبًا إجمالاً بطاقة السحب الفوري في جزء من عملية الشراء على الأقل، بينما لم يستخدم 9 أيًا من أشكال الدفع هذه.
 (a) كم عدد الطلاب الذين استخدموا أشكال الدفع النقدي وبطاقة السحب الفوري وقسيمة المساعدة المالية جميعًا؟
 (b) هل استخدم عدد طلاب أكثر النقد أم قسائم المساعدة المالية؟
 (c) كم تبلغ النسبة المئوية للطلاب الذين لم يستخدموا قسيمة المساعدة المالية؟

## 5-5 المجموعات غير المنتهية

61. جد حدًا عامًا للمجموعة $\{-5, -7, -9, -11, -13, \ldots\}$
62. وضِّح أن المجموعة $\{12, 24, 36, 48, 60, \ldots\}$ هي مجموعة غير منتهية.
63. وضح أن المجموعة في التمرين 62 قابلة للعد.

# اختبار على الوحدة

*بالنسبة إلى التمارين 4–1، اكتب كل مجموعة بذكر العناصر.*

1. المجموعة $P$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية بين 90 و100.
2. المجموعة $K$ هي مجموعة الحروف التي تتضمنها الكلمة *سلسبيل*.
3. $X = \{x | x \in N$ و $x < 80\}$
4. المجموعة $J$ هي مجموعة اسماء الأشهر التي تبدأ بالحرف "ي".

*بالنسبة إلى التمرينين 5 و6، اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة.*

5. $\{12, 14, 16, 18\}$
6. $\{4, 8, 16, \ldots 128\}$

*بالنسبة إلى التمارين 11–7، حدد ما إذا كانت المجموعة منتهية أم غير منتهية.*

7. $\{x | x \in N$ و $x$ مضاعف $6\}$
8. $\{a, b, c, \ldots, s, t\}$
9. المجموعة $V$ هي مجموعة أشخاص بشعر رائع.
10. اشرح لماذا المجموعة الواردة في التمرين 9 ليست محددة جيدًا. يجب كتابة إجابتك بحيث يفهمها الشخص الذي ليست لديه أدنى فكرة عن معنى "محددة جيدًا".
11. جـد جميع المجموعات الجزئية وجميع المجموعات الجزئية الفعلية لمجموعة الولايات المتاخمة لكاليفورنيا. كيف تعرف عدد المجموعات الجزئية التي تبحث عنها؟

*بالنسبة إلى التمارين 16–12، بفرض أن* $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ و $A = \{a, b, d, e, f\}$ و $B = \{a, g, i, j, k\}$ و $C = \{e, h, j\}$. جـد كل مما يلي.

12. $(A \cap B) \cup C$
13. $(A \cup B)'$
14. $A - B$
15. $(A - B) - C$
16. ارسم مخطط فِن Venn مستقلًا وظلله لكل مجموعة:
 $B - A,\ B' \cup A,\ A \cup B \cup C$
17. جـد كلا ناتجي الضرب الديكارتيين اللذين يمكن تكوينهما باستخدام المجموعة الواردة في التمرين 11 والمجموعة $C$ في التمارين 16–12.

*بالنسبة إلى التمارين 20–18، ارسم مخطط فِن Venn لكل مجموعة.*

18. $A' \cap B$
19. $(A \cap B)'$
20. $(A' \cup B') \cap C'$
21. إذا كان $n(A) = 1{,}500$ و $n(B) = 1{,}150$ و $n(A \cap B) = 350$، فجـد $n(A \cup B)$.
22. طالب يذاكر للحصول على درجة الماجستير في إدارة الألعاب الرياضية يعمل على فرضية عن انتشار الألعاب الرياضية للنساء في الكليات منذ أن أمر القانون التاسع بمنح فرص مكافئة للنساء. قام بتجميع بيانات عن 119 كلية تمتلك فرق كرة قدم تنافس في دوري الجامعات لكرة القدم (الذي لا يزال الكثير من المشجعين يطلقون عليه القسم الأول) ووجد أن 69 منها لديها فريق جولف نسائي و63 منها لديها فريق هوكي الحقل و83 لديها فريق سباحة نسائي. ثمة 28 كلية لديها فرق حقل في جميع الألعاب الرياضية الثلاث. ستة وأربعون منها لديها فرق نسائية للجولف والسباحة و40 لديها فرق نسائية للسباحة وهوكي الحقل و47 منها لديها فرق نسائية للجولف وهوكي الحقل.
 (a) كم عدد الكليات التي لديها فريق جولف نسائي، لكن ليس لديها فريق سباحة أو هوكي الحقل نسائي؟
 (b) ما النسبة المئوية للفرق التي لديها رياضتان على الأقل من الألعاب الرياضية الثلاث؟
 (c) إذا اخترت إحدى المدارس الواردة في الدراسة عشوائيًا، ما النسبة المئوية لاحتمال ألا يكون لديها أي من الألعاب الرياضية الثلاث؟
23. جـد حدًا عامًا للمجموعة $\{15, 30, 45, 60, 75, \ldots\}$.
24. وضّح أن المجموعة $\{\ldots, -4, -3, -2, -1\} \cup \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ مجموعة غير منتهية عددية. (*إرشاد:* ثمة سؤالان منفصلان بالفعل بحاجة إلى إجابة!)

*بالنسبة إلى التمارين 30–25، حدد ما إذا كانت كل عبارة صوابًا أم خطأ.*

25. $\{s, e, s, a, m, e\}$ تكافئ $\{s, a, m, e\}$
26. $\{4, 8, 12, 16, \ldots\} \subseteq \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
27. $\{15\} \subset \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
28. $9 \notin \{2, 4, 5, 6, 10\}$
29. $\{a, e, i, o, u, y\} \subseteq \{a, e, i, o, u\}$
30. $\{12\} \in \{12, 24, 36, \ldots\}$

# المشاريع

1. اطلب من الطلاب في الصف الدراسي ملء هذا الاستبيان:
   A. الذهاب إلى المدرسة بالسيارة: نعم ______ لا ______
   B. العمر: أقل من 15 ______ 15 أو أكبر ______
   C. يساعد أسرته في العمل: نعم ______ لا ______

   ارسم مخطط فِن *Venn*، ومن المعلومات أجب عن هذه الأسئلة:
   (a) كم عدد الطلاب الذين لا يذهبون بالسيارة إلى المدرسة؟
   (b) كم عدد الطلاب الذي يقل عمرهم عن 15 عامًا؟
   (c) كم عدد الطلاب الذين يساعدون أسرهم في العمل؟
   (d) كم عدد الطلاب الذي يقل عمرهم عن 15 عامًا ويساعدون أسرهم في العمل؟
   (e) كم عدد الطلاب الذين يذهبون بالسيارة إلى المدرسة ولا يساعدون أسرهم في العمل؟
   (b) كم عدد الطلاب الذين أعمارهم 15 عامًا أو أكبر ويساعدون أسرهم في العمل؟
   (g) كم عدد الطلاب الذين لا يذهبون بالسيارة إلى المدرسة ويساعدون أسرهم في العمل وأقل من 15 عامًا؟

2. إذا تكونت لديك فكرة عن هذه الوحدة ككل، فستعرف أن عمليات المسح تلعب دورًا كبيرًا في طريقة استخدام مخططات فِن *Venn* لتنظيم المعلومات. والآن حان الوقت لتصميم مسح خاص بك وحدك. يجب عليك جعل موضوع المسح شيئًا تجده مثيرًا للاهتمام وتصميم المسح بحيث يمكن تلخيص النتائج ودراستها باستخدام مخطط فِن *Venn* بثلاث مجموعات. يمكنك إنجاز هذه المهمة بطرح ثلاثة أسئلة منفصلة أو بتصميم اقتراع من سؤال واحد حيث يمكن للمستجيبين اختيار أي من الإجابات أو جميعها أو لا شيء منها.

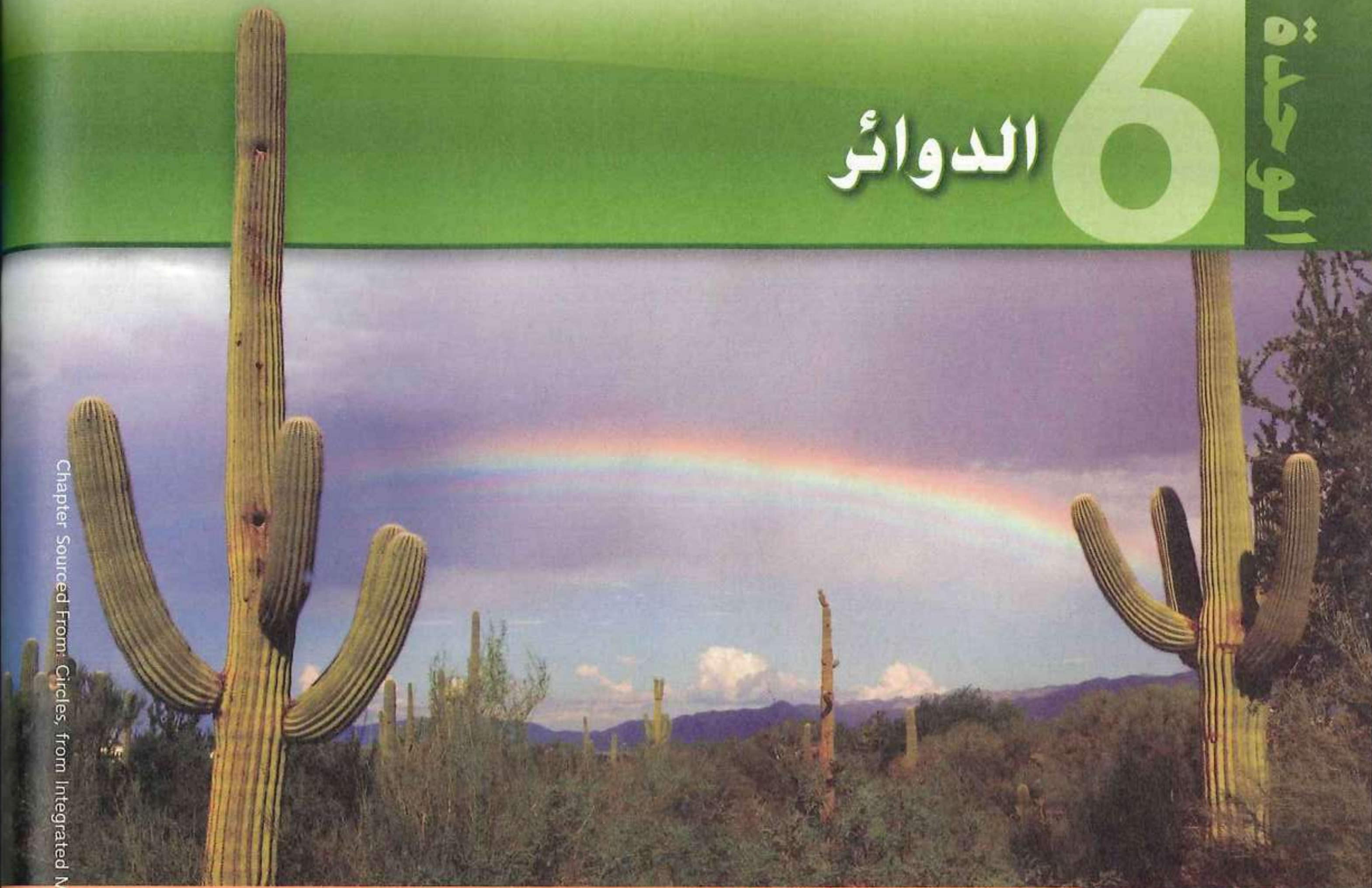
   وبمجرد تصميم المسح الخاص بك وكتابته وإجرائه، قم بتنظيم النتائج باستخدام مخطط فِن *Venn* ثم اكتب تقريرًا عن النتائج التي توصلت إليها. لا تقم بتضمين أعداد أولية فحسب—غالبًا ما يكمن الجزء الأهم من المسح في تلخيص معنى نتائج المسح وتفسيرها. ربما تريد وضع هذا الأمر الضروري في الحسبان عند تصميم المسح—من الصعب جدًا كتابة تفسير ذكي إذا كانت الأسئلة غير مترابطة تمامًا.

3. ربما تساءلت لماذا ذكرنا في الدرس 5 أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد، لكننا لم نقدم ما يدعم ذلك. الإجابة المختصرة هي أن إثبات تلك النتيجة عملية معقدة إلى حدٍ ما. إنها ليست بتلك الصعوبة، لكنها عملية بارعة للغاية وتنطوي على نوع من حدة الذهن. الأخبار الجيدة هو أنه يمكنك العثور على الإثبات على عشرة آلاف صفحة ويب مختلفة تقريبًا بالبحث عن "حجة كانتور القطرية". ابحث عن الصفحة التي تصف حجة كانتور القطرية بالطريقة التي يمكنك فهمها ثم كون عرضًا توضيحيًا للزملاء لمساعدتهم على فهم لماذا تكون الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد. تصديق *إضافي*: قم بتضمين مناقشة للحقيقة التي تفيد أن مجموعة الأعداد الحقيقية لها المجموعة الرئيسة نفسها التي تتضمنها الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد.

4. إذا كنت مهتمًا بأفكار عد المجموعات غير المنتهية بالفعل، فستجد إثارة أكثر مع هذا المشروع. تعرف إحدى أغرب المجموعات التي تم تقديمها وأكثرها جاذبية على الإطلاق باسم مجموعة كانتور. تبدأ بمجموعة تضم جميع الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد وتزيل تسلسل الأجزاء. قم بإجراء بحث عبر الإنترنت أو في المكتبة عن مجموعة كانتور وأجب عن الأسئلة التالية عنها:
   (a) كيف يمكنك التأكد من وجود شيء ما على الأقل في مجموعة كانتور؟ (ستكتشف عند الوهلة الأولى أن المجموعة قد تبدو خالية.)
   (b) كيف تعرف أن مجموعة كانتور ليست غير خالية فقط، لكنها غير منتهية كذلك؟
   (c) هل مجموعة كانتور قابلة للعد أم غير قابلة للعد؟ كيف تعرف ذلك؟
   (d) ما إجمالي طول جميع الفواصل التي يتم تجاهلها عند تعريف مجموعة كانتور؟ لماذا تلك النتيجة الصادمة؟

الوحدة

# 6 الدوائر



## السابق

لقد تعلّمت عن علاقات القطع الدائرية والزوايا الخاصة في المثلثات.

## الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- تعلّم العلاقات بين الزوايا المركزية والأقواس والزوايا المحيطية في الدائرة.
- تحديد القواطع والمماسات وتستخدمها.
- استخدام معادلة للتعرّف على دائرةٍ أو وصفها.

## لماذا؟ ▲

**العلوم** إن الشكل الحقيقي لقوس قُزح هو دائرةٌ كاملة. والجزء الذي يمكن رؤيته فوق الأفق هو قطعة خاصة من دائرة، ويدعى بالقوس.

# **الاستعداد** للوحدة

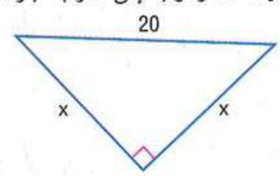
## تدريب **سريع**

**جـد النسبة المئوية من كل عدد معطى مما يلي.**

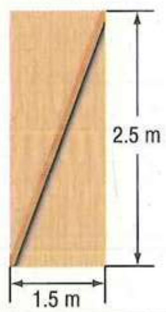
1. 26% من 500
2. 79% من 623
3. 19% من 82
4. 10% من 180
5. 92% من 90
6. 65% من 360

7. **البقشيش** تناول رجلٌ وزوجته طعام العشاء في مطعم إيطالي، حيث بلغت قيمة الفاتورة AED 32.50. فإذا أرادا أن يتركا بقشيشًا بنسبة 18%، فما المبلغ الذي ينبغي أن يتركاه؟

8. جـد قيمة $x$. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.




9. **البناء** تضع نورة دعامةً على اللوح المبين في الجهة اليسرى. جـد طول دعامة اللوح مقربًا إلى أقرب متر.




**حُلّ كل معادلة مما يلي باستخدام القانون العام. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة عند الضرورة.**

10. $5x^2 + 4x - 20 = 0$

11. $x^2 = x + 12$

12. **الألعاب النارية** أجرت الشركة الوطنية، وهي شركةٌ للألعاب النارية، عرضًا خلال الثاني من شهر ديسمبر. وقد سار أحد الصواريخ خلال العرض وفق المسار الممثل بالمعادلة $d = 80t - 16t^2$ حيث $t$ هو الزمن بالثواني، ولكن الصاروخ لم ينفجر.

## مراجعة **سريعة**

### مثال 1

**جـد النسبة المئوية من كل عدد معطى مما يلي.**

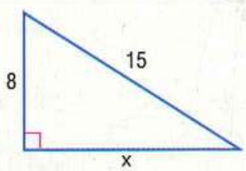
15% من 35 = (0.15)(35) — بتغيير النسبة المئوية إلى كسرٍ عشري.

= 5.25 — بالضرب.

إذًا، 15% من 35 تساوي 5.25

### مثال 2

**جـد قيمة $x$. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.**




$a^2 + b^2 = c^2$ — نظرية فيثاغورس

$x^2 + 8^2 = 15^2$ — بالتعويض

$x^2 + 64 = 225$ — بسّط.

$x^2 = 161$ — بالطرح.

$x = \sqrt{161}$ أو حوالي 12.7

### مثال 3

**حُـلّ $x^2 + 3x - 40 = 0$ باستخدام القانون العام. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.**

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — القانون العام

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$ — بالتعويض

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$ — بسّط.

$= 5 \text{ or } -8$ — بسّط.

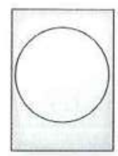
# البدء في هذه الوحدة

**سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك. قد تحتاج إلى العودة إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.**

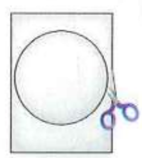
## المطويات منظّم الدراسة

**الدوائر** أنشئ المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات لهذه الوحدة عن الدوائر. وابدأ بتسع ورقات من ورق التمثيل البياني.

1 **ارسم** دائرةً قطرها 20 cm على كل ورقة باستخدام منقلة.

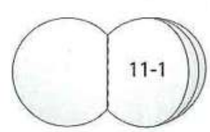


2 **قُصَّ** كل ورقة من الأوراق.



3 **قم** بتدبيس الدوائر على بعد سنتيمترين من الجهة اليسرى للأوراق.


4 **سَمِّ** الطيّات كما هو موضح.



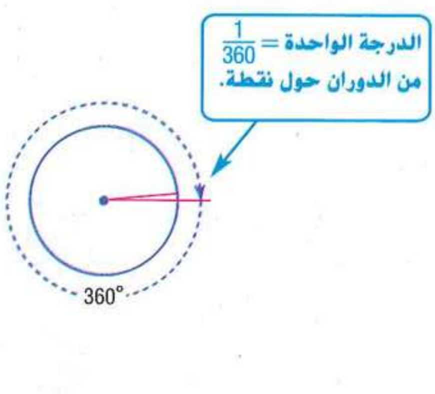

## المفردات الجديدة

| | |
|---|---|
| دائرة | circle |
| مركز | center |
| نصف القطر | radius |
| وتر | chord |
| قطر الدائرة | diameter |
| محيط الدائرة | circumference |
| باي π | π pi |
| محيطية | inscribed |
| محيطية للدائرة | circumscribed |
| الزاوية المركزية | central angle |
| قوس | arc |
| مماس | tangent |
| قاطع | secant |
| قطعة الوتر | chord segment |

## مراجعة المفردات

**النقاط** متّحدة المستوى نقاط تقع في المستوى نفسه

**الدرجة** $\frac{1}{360}$ من الدوران حول نقطة



# الدرس 6-1 الدوائر والمحيط


| ∴ السابق | ∴ الحالي | ∴ لماذا؟ |
|---|---|---|
| • تعرّفت على أجزاء متوازيات الأضلاع واستخدمتها. | 1 • تحديد أجزاء الدوائر واستخدامها.<br>2 • حلّ المسائل التي تشتمل على محيط دائرة. | • تتحرك لعبة المقص في مدينة الألعاب والموضحة بالشكل جيئةً وذهابًا باتجاه عقارب الساعة. وفي بعض الأوقات، يكون الركاب رأسًا على عقبٍ على ارتفاع 43 m فوق سطح الأرض، بحيث يمرّون "بزمنٍ في الهواء"، وفيه يشعرون بانعدام الوزن. عرض الجولة، أو قطره يساوي 13.4 m. ويمكنك إيجاد المسافة التي يقطعها الراكب خلال دورةٍ واحدةٍ باستخدام هذا المقياس. |

## المفردات الجديدة

دائرة circle
مركز center
نصف القطر radius
وتر chord
قطر الدائرة diameter
الدوائر متحدة المركز concentric circles
محيط الدائرة circumference
باي pi ($\pi$)
محاط inscribed
محيط circumscribed

**ممارسات في الرياضيات**
استخدام نماذج الرياضيات.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

## 1 القطع في الدوائر

إن **الدائرة** هي المحل الهندسي لمجموعة من جميع نقاط المستوى متساوية البعد عن نقطة ثابتة تدعى **مركز** الدائرة.

الدائرة C أو $\odot C$

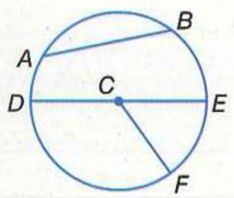
للقطع التي تقطع دائرةً أسماؤها خاصة.

### المفهوم الرئيسي القطع الخاصة في دائرة

إن **نصف القطر** (جمعها أنصاف الأقطار) قطعةٌ مستقيمةٌ تقع إحدى نقطتاها الطرفيتان في المركز والأخرى على الدائرة.
**أمثلة** $\overline{CF}$، $\overline{CE}$، $\overline{CD}$ نصفا قطرٍ في الدائرة $\odot C$.

**الوتر** قطعة مستقيمة تقع نقطتاها الطرفيتان على الدائرة.
**أمثلة** $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ وتران في الدائرة $\odot C$.

**القطر** في دائرة هو وترٌ يمرّ من المركز ويتكون من نصفي قطرين يقعان على استقامة واحدة.
**مثال** $\overline{DE}$ هو قطر في الدائرة $\odot C$. يتكون القطر $\overline{DE}$ من نصفي القطر الواقعين على استقامة واحدة $\overline{CD}$ و $\overline{CE}$.

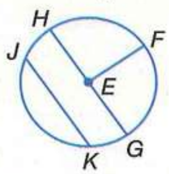



### مثال 1 تحديد القطع في دائرة.

**a. سَمِّ الدائرة وحدّد نصف قطرٍ فيها.**


يقع مركز الدائرة عند النقطة $P$، ولذلك فهي تسمّى الدائرة $P$ أو الدائرة $\odot P$.
نوضح ثلاثة أنصاف قطر: $\overline{PL}$ و $\overline{PN}$ و $\overline{PM}$.

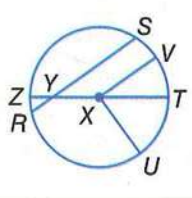
**b. حدّد وترًا وقطرًا في الدائرة.**




نوضّح وترين اثنين: $\overline{JK}$ و $\overline{HG}$.
$\overline{HG}$ يمر بالمركز، إذًا $\overline{HG}$ قطرٌ في الدائرة.

**تمرين موجّه**

**1.** سَمِّ الدائرة إضافةً إلى نصف قطرٍ ووترٍ وقطرٍ فيها.



بالتعريف، فإن المسافة من مركز الدائرة إلى أيِ نقطةٍ على محيطها هي واحدةٌ دائمًا. ولذلك، فإن جميع الأقطار $r$ في الدائرة متطابقة. وبما أن القطر $d$ يتركّب من قطرين اثنين، فجميع أقطار الدائرة متطابقة أيضًا.

**قراءة في الرياضيات**

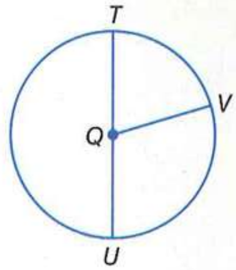
**الدقة** تستخدم كلمتا *نصف القطر* و *القطر* لوصف طولين وقطعتين مستقيمتين. وبما أن للدائرة الكثير من أنصاف الأقطار والأقطار المختلفة، فإن الكلمتين *نصف القطر* و*القطر* تشيران إلى طولين لا قطعتين مستقيمتين.

## المفهوم الأساسي علاقات نصف القطر والقطر

إذا كان لدائرةٍ نصف القطر $r$ والقطر $d$، فإن العلاقات التالية تنطبق عليها.

**قانون نصف القطر** $r = \frac{d}{2}$ أو $r = \frac{1}{2}d$ **قانون القطر** $d = 2r$

## مثال 2 إيجاد نصف القطر والقطر




**إذا كان طول $QV = 8$ cm، فما قطر الدائرة $\odot Q$؟**

$d = 2r$ قانون قطر الدائرة

$= 2(8) = 16$ بالتعويض والتحويل لأبسط صورة.

قطر الدائرة $\odot Q$ يساوي 16 cm.

**تمرين موجّه**

**2A.** إذا كان طول $TU = 14$ m، فما هو نصف قطر الدائرة $\odot Q$؟

**2B.** إذا كان طول $QT = 11$ m، فما هو طول $QU$؟

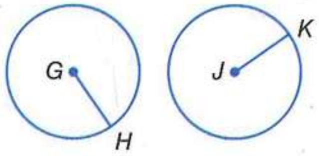
وكما الأشكال الأخرى، فيمكن لدائرتين أن تكونا متطابقتين أو متشابهتين أو أن تشتركا بعلاقاتٍ خاصةٍ أخرى.

## المفهوم الأساسي أزواج الدوائر

**مراجعة المفردات**

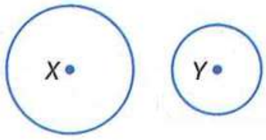
**النقاط** متّحدة المستوى نقاط تقع في المستوى نفسه

تتطابق دائرتان حصرًا إذا كانتا تضمان نصفي قطرٍ متطابقين.



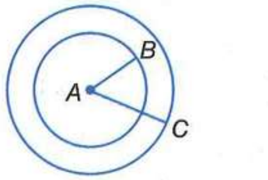

**مثال** $\overline{GH} \cong \overline{JK}$، إذًا $\odot G \cong \odot J$.

كل الدوائر متشابهة.




**مثال** $\odot X \sim \odot Y$

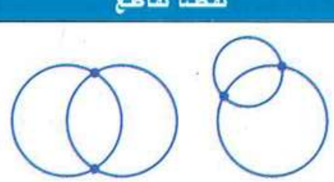
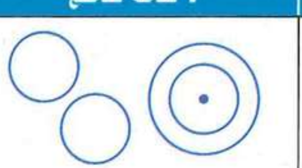
**الدوائر متحدة المركز** هي دوائر متّحدة المستوى لها المركز نفسه.




**مثال** الدائرة $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AB}$ والدائرة $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AC}$ متّحدتا المركز.

وستبرهن على أن جميع الدوائر متشابهةٌ في التمرين 52.

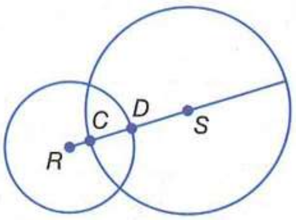
يمكن لدائرتين أن تتقاطعا بطريقتين مختلفتين اثنتين.

| نقطتا تقاطع | نقطة تقاطع واحدة | لا نقاط تقاطع |
|---|---|---|
|  |  |  |

تضم القطعة المستقيمة التي تربط مركزي الدائرتين المتقاطعتين نصفي قطري الدائرتين.

## مثال 3 إيجاد قياسات في الدوائر المتقاطعة

**قطر الدائرة $\odot S$ يساوي 30 وحدة، وقطر الدائرة $\odot R$ يساوي 20 وحدة، و 9 وحدة = $DS$. جـد $CD$.**




بما أن قطر الدائرة $\odot S$ يساوي 30، فإن $CS = 15$.
$\overline{CD}$ جزء من نصف القطر $\overline{CS}$.

| | |
|---|---|
| بحسب مسلّمة جمع القطع المستقيمة | $CD + DS = CS$ |
| بالتعويض | $CD + 9 = 15$ |
| بطرح 9 من كل طرف. | $CD = 6$ |

تمرين موجّه

**3.** استخدم التمثيل البياني أعلاه لإيجاد $RC$.

**2 المحيط** إن **محيط** الدائرة هو المسافة حول الدائرة. وبالتعريف، فإن النسبة $\frac{C}{d}$ هي عدد غير نسبي يدعى **باي ($\pi$)**. ويمكن اشتقاق قانونين لحساب المحيط عبر استخدام التعريف.

| | |
|---|---|
| تعريف باي | $\frac{C}{d} = \pi$ |
| بضرب كل طرف بـ $d$. | $C = \pi d$ |
| $d = 2r$ | $C = \pi(2r)$ |
| بسّط. | $C = 2\pi r$ |

### المفهوم الأساسي المحيط

**الشرح** إذا كان لدائرة القطر $d$ ونصف القطر $r$، فإن المحيط $C$ يساوي القطر مضروبًا بالعدد باي أو مِثلي نصف القطر مضروبًا بالعدد باي.

**الرموز** $C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

## مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد المحيط

**كرة المضرب جـد محيط منصة هبوط الطائرات الموصوفة على الجهة اليمين.**

| | |
|---|---|
| قانون المحيط | $C = \pi d$ |
| بالتبديل | $= \pi(24)$ |
| بسّط. | $= 24\pi$ |
| باستخدام آلة حاسبة. | $\approx 75.4$ |

محيط منصة هبوط الطائرات يساوي $24\pi$ cm أو حوالي 75.4 cm.

تمرين موجّه

**جـد محيط كل دائرة موصوفة، وقرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.**

**4A.** نصف القطر= 2.5 cm

**4B.** قطر الدائرة= 16 m

### الربط بالحياة اليومية

في عام 2005، لعب روجيه فيدرير وأندريه أغاسّي كرة المضرب على منصة هبوط الطائرات الحوامة في برج العرب بالإمارات العربية المتحدة. وكان قطر منصة الهبوط يساوي 24 m وارتفاعها قرابة 213 m.

**المصدر:** موقع برج العرب، مباني إمبوريس

يمكن استخدام قوانين المحيط أيضًا لتحديد قطر دائرةٍ ونصف قطرها عند إعطاء المحيط.

## مثال 5 إيجاد قطر الدائرة ونصف قطرها

**جـد قطر دائرةٍ ونصف قطرها مقربين إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ إذا كان محيط الدائرة 106.4 mm.**

قانون المحيط $C = \pi d$

بالتعويض $106.4 = \pi d$

بقسمة كل طرف على $\pi$. $\frac{106.4}{\pi} = d$

باستخدام الآلة الحاسبة. $33.87 \text{ mm} \approx d$

قانون نصف القطر $r = \frac{1}{2}d$

$d \approx 33.87$ $\approx \frac{1}{2}(33.87)$

باستخدام الآلة الحاسبة. $\approx 16.94 \text{ mm}$

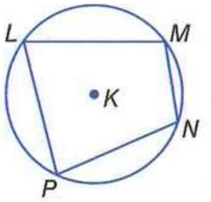
تمرين موجّه

**5.** جـد قطر دائرةٍ ونصف قطرها مقربين إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ إذا كان محيط الدائرة 77.8 cm.

**نصيحة دراسية**

**مستويات الدقة** بما أن $\pi$ غير نسبي، فلا يمكن إعطاء قيمته في صورة كسرٍ عشري منتهٍ. ويعطي استخدام القيمة 3 لـ $\pi$ تقديرًا سريعًا خلال الحسابات. ويعطي استخدام القيمة 3.14 أو $\frac{22}{7}$ تقديرًا أدق. وللحصول على التقريب الأدقّ، استخدم المفتاح $\pi$ على الآلة الحاسبة. وما لم يذكر خلاف ذلك، افترض أننا استخدمنا في هذا النصّ آلةً حاسبةً تضم الزر $\pi$ لتوليد الإجابات.

يكون المضلع **محاطًا** بدائرةٍ إذا كانت جميع رؤوسه تقع على الدائرة. وتعدّ الدائرة **محيطةً** للمضلع إذا كانت تضمّ رؤوس المضلع جميعها.




- المضلع $LMNP$ محاط *بالدائرة* $\odot K$.
- الدائرة $K$ محيطة للشكل الرباعي $LMNP$.

## مثال 6 على الاختبار المعياري محيط مضلع محاط بدائرة

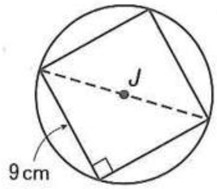
**إجابة قصيرة يحاط مربعٌ طول ضلعه 9 cm بالدائرة $\odot J$. جـد المحيط الدقيق للدائرة $\odot J$.**

**قراءة فقرة الاختبار**

ينبغي عليك إيجاد قطر الدائرة واستخدامه لحساب محيطها.

**حَل فقرة الاختبار**

أولاً، صمم رسمًا تخطيطيًا. قطر المربع هو قطر الدائرة وهو وتر مثلث قائم.




نظرية فيثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$

بالتعويض $9^2 + 9^2 = c^2$

بسّط. $162 = c^2$

بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف. $9\sqrt{2} = c$

قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2}$ cm.

جـد المحيط بدلالة $\pi$ عبر تعويض $9\sqrt{2}$ بدلاً من $d$ في $C = \pi d$.
المحيط الدقيق هو $9\pi\sqrt{2}$ cm.

**نصيحة دراسية**

**الدائرة المحيطية** إن *الدائرة المحيطية* هي دائرةٌ تمرّ بجميع رؤوس مضلع.

تمرين موجّه

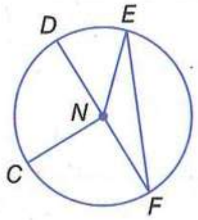
**جـد المحيط الدقيق لكل دائرةٍ باستخدام المضلع المعطى.**

**6A.** مثلث قائم الزاوية محاط بدائرة وطولا ساقيه 7 m و 3 m

**6B.** مربع محاط طول ضلعه 10 m

## التحقق من فهمك

**المثالان 1 و 2** **لحل التمارين 4-1، عد إلى الدائرة $\odot N$.**




**1.** سَمِّ الدائرة

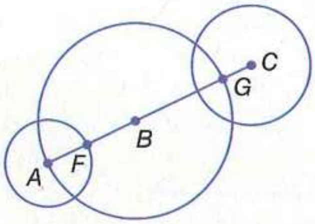
**2.** حدّد كلاً مما يلي.

**a.** وتر **b.** قطر **c.** نصف قطر

**3.** إذا كان $CN = 8$ cm، جـد $DN$.

**4.** إذا كان $EN = 13$ m، فكم يساوي قطر الدائرة؟

**مثال 3** **أقطار الدوائر $\odot A$ و $\odot B$ و $\odot C$ هي 8 cm و 18 cm و 11 cm على التوالي. جـد كل قياس.**



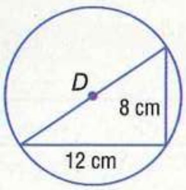

**5.** $FG$

**6.** $FB$

**مثال 4** **7. ألعاب الملاهي** للعبة الملاهي الدائرية الموصوفة في بداية هذا الدرس القطر 13.4 m. فما هو نصف قطر اللعبة ومحيطها؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة عند الضرورة.

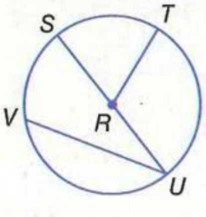
**مثال 5** **8. التمثيل بالنماذج** محيط بركة السباحة الدائرية يساوي حوالي 56.5 m. فما قطر البركة ونصف قطرها؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

**مثال 6** **9. إجابة قصيرة** المثلث الموضح القائم محاط بالدائرة $\odot D$. جـد المحيط الدقيق للدائرة $\odot D$.




## التمرين وحل المسائل

**المثالان 1 و 2** **لحل التمارين 13-10، عد إلى الدائرة $\odot R$.**



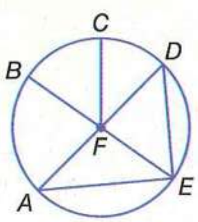

**10.** سَمِّ مركز الدائرة.

**11.** حدّد وترًا هو قطرٌ في الدائرة أيضًا.

**12.** هل $\overline{VU}$ نصف قطر؟ اشرح.

**13.** إذا كان طول $SU = 16.2$ cm، فما طول $RT$؟

**لحل التمارين 17-14، عد إلى الدائرة $\odot F$.**



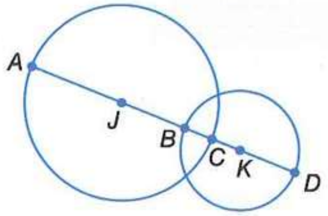

**14.** حدّد وترًا لا يعدّ قطرًا في الدائرة.

**15** إذا كان $CF = 14$ cm، فما هو قطر الدائرة؟

**16.** هل $\overline{AF} \cong \overline{EF}$؟ اشرح.

**17.** إذا كان طول $DA = 7.4$ cm، فما هو طول $EF$؟

مثال 3 للدائرة $J$ نصف قطرٍ يساوي 10 وحدات، وللدائرة $\odot K$ نصف قطر يساوي 8 وحدات، و $BC = 5.4$ وحدات. جـد كلّ القياسات.



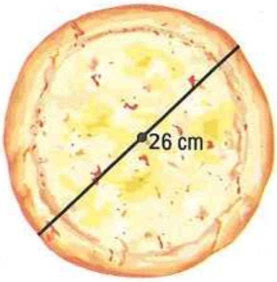

**18.** $CK$

**19.** $AB$

**20.** $JK$

**21.** $AD$

مثال 4 **22. البيتزا** جـد نصف القطر والمحيط لقطعة البيتزا الموضحة. وقرّب إلى أقرب جزء من مئة عند الضرورة.



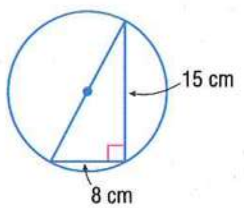

**23. الدراجات** قطرا عجلة إحدى الدراجات يساويان 26 cm. جـد نصف قطر العجلة ومحيطها. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من المئة عند الضرورة.

مثال 5 **جـد قطر الدائرة ذات المحيط المعطى ونصف قطرها. وقرّب إلى أقرب مئة.**

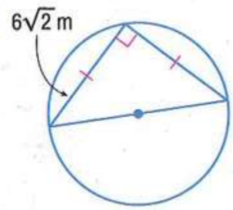
**24.** $C = 18$ cm **25.** $C = 124$ m **26.** $C = 375.3$ cm **27.** $C = 2608.25$ m

مثال 6 **الاستنتاج المنطقي** جـد المحيط الدقيق لكل دائرةٍ باستخدام المضلّع المحيط لها أو المحاط بها.

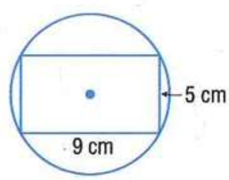
**28.**



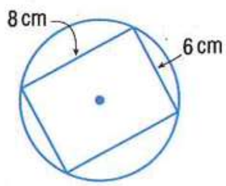

**29**



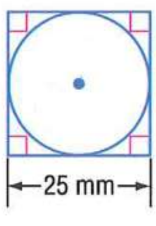

**30.**



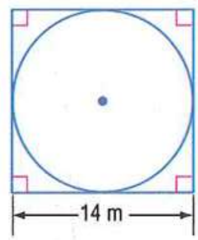

**31.**



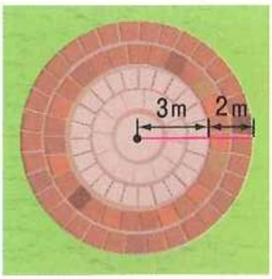

**32.**




**33.**




**34. جولف القرص** تشبه لعبة جولف القرص لعبة الجولف المعتادة، باستثناء استخدام قرصٍ طائرٍ بدلاً من الكرة والعصا. وفي المنافسات الاحترافية، يبلغ الوزن الأقصى للقرص بالجرامات 8.3 أمثال القطر بالسنتيمتر. فما هو أقصى وزنٍ مسموحٍ به لقرصٍ محيطه 66.92 cm؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.




**35. الفناءات المرصوفة** ينوي السيد علي بناء الفناء المرصوف الموضّح.

**a.** ما المحيط التقريبي للفناء؟

**b.** إذا غيّر السيد علي خطته بحيث يصبح للدائرة الداخلية محيطٌ يساوي 25 m تقريبًا، فكم ينبغي أن يساوي نصف قطر الدائرة مقربًا إلى أقرب متر؟

**يعطى فيما يلي نصف قطر دائرةٍ أو قطرها أو محيطها. جـد كلاً من القياسات المجهولة مقربًا إلى أقرب جزءٍ من مئة.**

**36.** $d = 8\frac{1}{2}$ cm, $r =$ __?__, $C =$ __?__

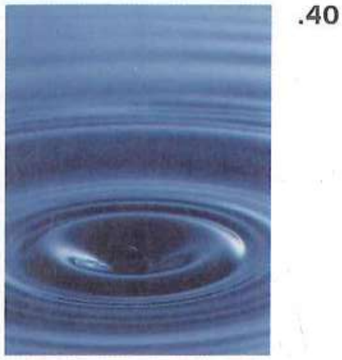
**37.** $r = 11\frac{2}{5}$ m, $d =$ __?__, $C =$ __?__

**38.** $C = 35x$ cm, $d =$ __?__, $r =$ __?__

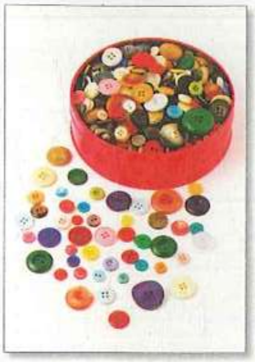
**39.** $r = \frac{x}{8}$, $d =$ ____, $C =$ __?__

**حدّد ما إذا كانت الدوائر الموضحة في الأشكال أدناه تبدو *متطابقةً* أم *متّحدة المركز* أم غير ذلك.**

.40



.41



.42

**.43** شكل الجزيرة الموضحة قريبٌ من شكل الدائرة. فإذا كانت كل وحدة في الشبكة الإحداثية تمثل 25 m، فما المسافة التي يتعيّن على شخصٍ ما قطعها ليدور حول الحلقة بكاملها؟ قرّب إلى أقرب عُشر.


**.44 تمثيل النماذج** يجري إنشاء ممرٍ من القرميد حول بركةٍ دائرية. محيط البركة يساوي 68 m. وسيكون بعد الحافة الخارجية للممرّ 4 m عن البركة في محيطها كلّه. فما هو المحيط التقريبي للممرّ؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

**.45 التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المسألة عملية تغيير أبعاد الدوائر.

**a. سؤال هندسي** استخدم فرجارًا لرسم ثلاث دوائر معامل القياس بين كل دائرةٍ والدائرة الأكبر يساوي 1:2.

**b. سؤال جدوليّ** احسب نصف قطر كل دائرةٍ (مقربًا إلى أقرب عُشر) ومحيطها (مقربًا إلى أقرب جزءٍ من مئة). ودوّن نتائجك في جدول.

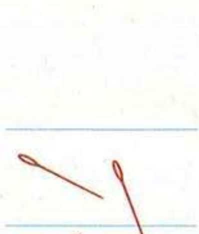
**c. سؤال لفظي** اشرح السبب في أن هذه الدوائر الثلاث ستكون متشابهةً هندسيًا.

**d. سؤال لفظي** خمّن النسبة بين محيطي دائرتين حين تكون النسبة بين نصفي قطريهما 2.

**e. سؤال تحليلي** معامل المقياس من الدائرة $\odot A$ إلى الدائرة $\odot B$ يساوي $\frac{b}{a}$. اكتب معادلةً تربط المحيط $(C_A)$ للدائرة $\odot A$ بالمحيط $(C_B)$ للدائرة $\odot B$.

**f. سؤال عددي** إذا كان معامل المقياس من الدائرة $\odot A$ إلى الدائرة $\odot B$ يساوي $\frac{1}{3}$ وكان محيط الدائرة $\odot A$ يساوي 12 cm فما محيط الدائرة $\odot B$؟

**.46 إبرة بوفون** قس طول إبرة (أو عود لتنظيف الأسنان) $\ell$ بالسنتيمتر. ثم ارسم مجموعة مستقيماتٍ أفقيةً تبعد عن بعضها المسافة $\ell$ سنتيمترًا على ورقةٍ بيضاء فارغة.

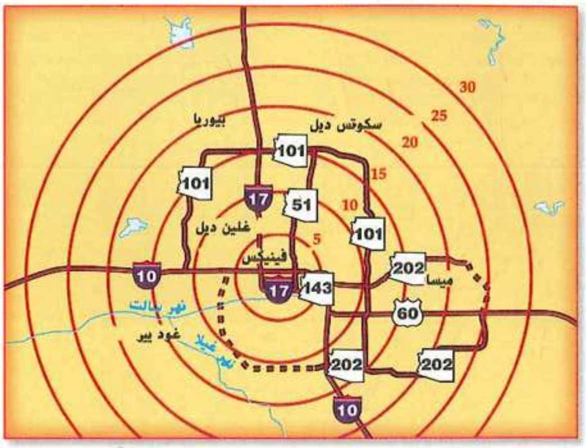


**a.** اسقط الإبرة على الورقة. وحين تحطّ الإبرة على الورقة، سجّل إن كانت تلمس أحد المستقيمات. ودوّن عدد مرات إصابة خطٍ بعد 25 و 50 و 100 عملية إسقاط.

**b.** احسب النسبة بين مِثلي عدد مرات السقوط وبين عدد مرات إصابة مستقيمٍ بعد 25 و 50 و 100 عملية إسقاط.

**c.** ما الرابط بين القيم التي توصلت إليها في الجزء b فيما يتعلق بـ $\pi$؟

**47** **خرائط** توضّح الدوائر متحدة المركز على الخريطة المناطق التي تبعد 8 km و 16 km و 24 km و 32 km و 40 km و 48 km عن مركز مدينة فينيكس.

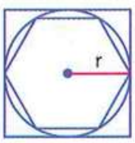



**a.** فكم يزيد محيط الدائرة الخارجية عن محيط الدائرة المركزية؟

**b.** عند زيادة أنصاف أقطار الدوائر بمقدار 8 km، فكم ستزيد محيطاتها؟

## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

**48.** **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك وصف العلاقات القائمة بين الدوائر والمستقيمات؟ انظر الهامش.



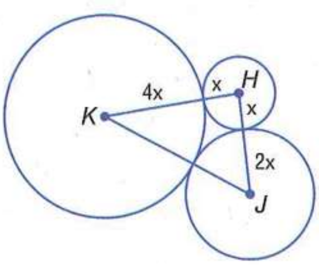

**49.** **الاستنتاج** تُرسم في الشكل دائرةٌ نصف قطرها $r$ داخل مضلّعٍ منتظمٍ وتحيط بمضلعٍ آخر.

**a.** ما هما محيطا المضلّعين المحيط للدائرة والمحاط بالدائرة بدلالة $r$؟ اشرح.

**b.** هل المحيط $C$ الخاص بالدائرة أكبر أو أصغر من محيط المضلّع المحيط للدائرة؟ وماذا عن المضلع الحاط بالدائرة؟ اكتب متباينةً مركبةً تقارن $C$ بهذين المحيطين.

**c.** أعد كتابة المتباينة في الجزء b بدلالة القطر $d$ الخاص بالدائرة وفسّر معنى تلك المتباينة.

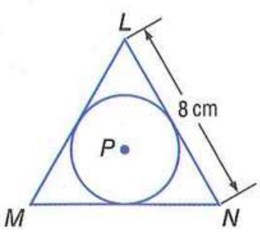
**d.** عندما يزداد عدد أضلاع المضلعين المحيط والمحاط، فما الذي سيحدث للحدّين الأعلى والأدنى للمتباينة في الجزء $C$، وما الذي يشير إليه ذلك؟




**50.** **التحدي** مجموع محيطات الدوائر $H$ و $J$ و $K$ الموضحة على الجهة اليمنى يساوي $56\pi$ وحدة. جـــد $KJ$.

**51.** **التبرير** هل المسافة من مركز دائرةٍ إلى نقطةٍ بداخلها أصغر من قطر تلك الدائرة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم *ليست كذلك على الإطلاق*؟ اشرح

**52.** **الفرضيات** استخدم تعريف المحل الهندسي لدائرة وعمليات تغيير الأبعاد لإثبات تشابه جميع الدوائر.

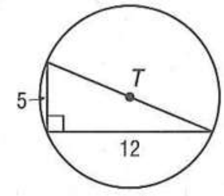



**53.** **التحدي** في الشكل، تُرسم الدائرة $\odot P$ داخل المثلث متساوي الأضلاع $LMN$ فما هو محيط الدائرة $\odot P$؟

**54.** **الكتابة في الرياضيات** ابحث واكتب عن تاريخ العدد باي وأهميته في دراسة الهندسة.

## تدريب على الاختبار المعياري

**55. إجابة شبكية** ما محيط الدائرة $\odot T$؟ قرّب لأقرب عُشر.




**56.** ما هو نصف قطر فناءٍ دائريٍ محيطه 10 m؟

**A** 1.6 m　　**C** 3.2 m

**B** 2.5 m　　**D** 5 m

**57. الجبر** يخطط عمر بستانًا دائريًا لزراعة الخضروات، مع وجود سورٍ يطوّق حدود البستان. فإذا كان يُسمح له أن يستخدم طولاً يصل إلى 50 m من أجل السور، فما هو نصف القطر الذي يمكنه استخدامه لتشييد البستان؟

**F** 10　　**G** 9　　**H** 8　　**J** 7

**58. SAT/ACT** ما هو نصف قطر دائرةٍ مساحتها $\frac{\pi}{4}$ بالوحدات المربعة؟

**A** 0.4 وحدات　　**D** 4 وحدات

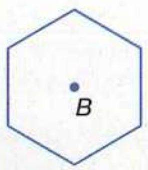
**B** 0.5 وحدات　　**E** 16 وحدات

**C** وحدتان

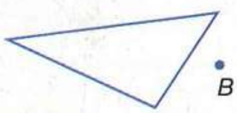
## مراجعة شاملة

**انسخ كلاً من الأشكال إضافةً إلى النقطة *B*. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل الذي مركزه *B* بعد تغيير الأبعاد وفق معامل القياس المحدّد *r*.**

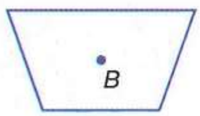
**59.** $r = \frac{1}{5}$



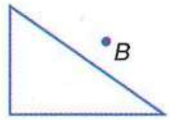

**60.** $r = \frac{2}{5}$




**61.** $r = 2$




**62.** $r = 3$

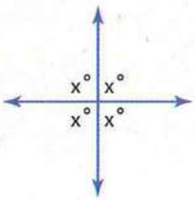



**63. الهندسة المعمارية** إن هرم اللوفر هو المدخل الرئيسي إلى متحف اللوفر بباريس في فرنسا. ويتركب هيكله بصورةٍ رئيسةٍ من قطعٍ زجاجيةٍ ذات شكل رباعي، كما هو موضح في الصورة على الجهة اليمنى. صِف طريقةً يمكن استخدامها لإثبات أن أشكال القطع هي متوازيات أضلاع.

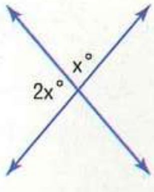
## مراجعة المهارات

**جـد قيمة *x*.**

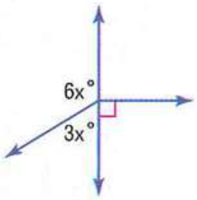
**64.**



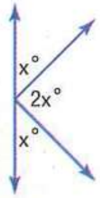

**65.**




**66.**




**67.**



# الدرس 6-2 قياس الزوايا والأقواس

| السابق | الحالي | لماذا؟ |
|---|---|---|
| لقد قِست الزوايا وحدّدت الزوايا المتطابقة. | **1** تحديد الزوايا المركزية والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى وأنصاف الدوائر، وإيجاد قياسها. <br> **2** إيجاد أطوال الأقواس. | تقع النجوم الثلاثون في العلم الموضح على مسافاتٍ متساويةٍ عن بعضها بعضًا وتبعد عن نقطةٍ ثابتةٍ مسافةً واحدة. تختلف المسافة بين النجوم اعتمادًا على قياس العلم، ولكن قياس الزاوية المركزية المشكّلة من مركز الدائرة وأي نجمتين متتاليتين هي نفسها دائمًا. |

### المفردات الجديدة

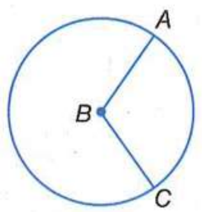
الزاوية المركزية
central angle
قوس arc
القوس الأصغر minor arc
القوس الأكبر major arc
نصف الدائرة semicircle
الأقواس المتطابقة
congruent arcs
الأقواس المتجاورة
adjacent arcs
طول القوس arc length

### ممارسات في الرياضيات

مراعاة الدقة.
استخدام نماذج الرياضيات.

## 1 الزوايا والأقواس

إن **الزاوية المركزية** في دائرةٍ هي زاويةٌ يقع رأسها عند مركز الدائرة. وهي تضم نصفي قطرٍ في الدائرة. الزاوية $\angle ABC$ هي زاوية مركزية في الدائرة $\odot B$.

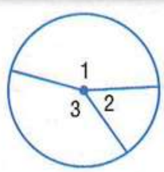



تذكر أن *الدرجة* تساوي $\frac{1}{360}$ من الدوران حول نقطة. وهذا يعطي العلاقة التالية.

### المفهوم الأساسي مجموع الزوايا المركزية

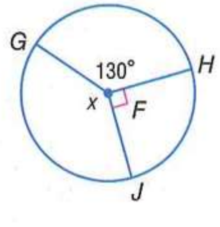
**الشرح** مجموع قياس الزوايا المركزية في دائرة دون وجود نقاط داخلية مشتركة يساوي 360.

**مثال** $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360$




### مثال 1 إيجاد قياس الزوايا المركزية

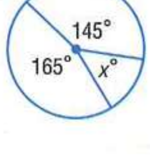
**جـد قيمة $x$.**



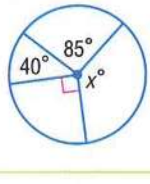

| | |
|---|---|
| $m\angle GFH + m\angle HFJ + m\angle GFJ = 360$ | مجموع قياس الزوايا المركزية |
| $130 + 90 + m\angle GFJ = 360$ | بالتعويض |
| $220 + m\angle GFJ = 360$ | بسّط. |
| $m\angle GFJ = 140$ | بطرح 220 من كل طرف. |

تمرين موجّه

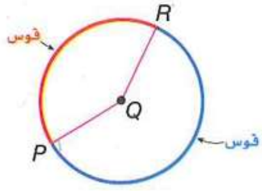
**1A.**




**1B.**



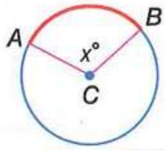
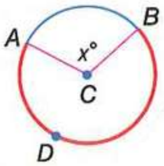
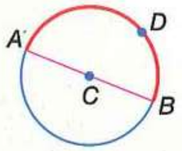

إن **القوس** هو جزءٌ من دائرةٍ يُحدَّد بنقطتين اثنتين. تقسم الزاوية المركزية الدائرة إلى قوسين يعتمد قياساهما على قياس الزاوية المركزية.



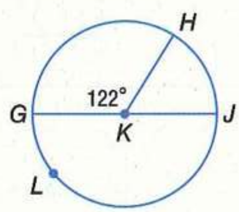
## نصيحة دراسية

**تسمية الأقواس** تُسمّى الأقواس تبعًا لنقطتيها الطرفيتين. وتُسمّى الأقواس الكبرى وأنصاف الدوائر بحسب النقطتين الطرفيتين إضافةً إلى نقطةٍ أخرى على القوس تقع بين هاتين النقطتين الطرفيتين.

## المفهوم الأساسي الأقواس وقياسها

| القوس | القياس | |
|---|---|---|
| **القوس الأصغر** هو أقصر قوسٍ يربط نقطتين طرفيتين على الدائرة. | قياس القوس الأصغر أقل من 180 وقياس الزاوية المركزية المقابلة يساوي. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x$ |  |
| **القوس الأكبر** هو أطول قوسٍ يربط نقطتين طرفيتين على الدائرة. | قياس القوس الأكبر أكبر من 180، ويساوي 360 ناقصًا قياس القوس الأصغر الذي له النقطتان الطرفيتان نفسهما. $m\widehat{ADB} = 360 - m\widehat{AB} = 360 - x$ |  |
| **نصف الدائرة** هو قوسٌ تقع نقطتاه الطرفيتان على قطر الدائرة. | قياس نصف الدائرة يساوي 180. $m\widehat{ADB} = 180$ |  |

## مثال 2 تصنيف الأقواس وإيجاد قياسها



***$\overline{GJ}$ هو قطر الدائرة $\odot K$ حدّد إن كان كل قوسٍ قوسًا أكبر أو قوسًا أصغر أو نصف دائرة. ثم جد قياسه.***

**a.** $m\widehat{GH}$

$\widehat{GH}$ قوس أصغر، إذًا $m\widehat{GH} = m\angle GKH$ أو 122.

**b.** $m\widehat{GLH}$

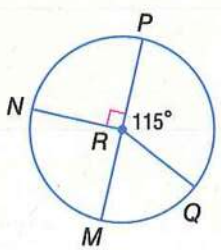
$\widehat{GLH}$ قوسٌ أكبر يشترك في بالنقاط نفسها مع القوس الأصغر $\widehat{GH}$.

**c.** $m\widehat{GLJ}$

$\widehat{GLJ}$ نصف دائرة إذًا $m\widehat{GLJ} = 180$.

$$m\widehat{GHL} = 360 - m\widehat{GH}$$
$$= 360 - 122 \text{ or } 238$$

### تمرين موجّه



***$\overline{PM}$ هو قطرٌ في الدائرة $\odot R$. حدّد إذا كان كل قوسٍ قوسًا أكبر أو قوسًا أصغر، أو نصف دائرة. ثم جد قياسه.***

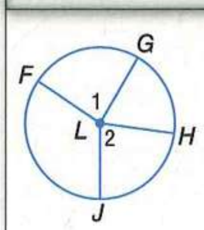
**2A.** $\widehat{MQ}$ **2B.** $\widehat{MNP}$ **2C.** $\widehat{MNQ}$

## مهنة من الحياة اليومية

**الباحث التاريخي** يتضمن البحث في المتاحف دراسة القطع الأثرية والتحقق منها ووصفها. ولكي يعمل المرء باحثًا تاريخيًا، فيشترط عليه أن ينال درجة البكالوريوس في التاريخ. عد إلى التمرينين 42-43.

**الأقواس المتطابقة** هي أقواسٌ تقع في الدوائر نفسها أو في دوائر متطابقة لها القياس نفسه.

## النظرية 6.1



**الشرح** في الدائرة الواحدة أو في دائرتين متطابقتين، يتطابق قوسان أصغران إذا وفقط إذا كانت زاويتاهما المركزيتان متطابقتين.

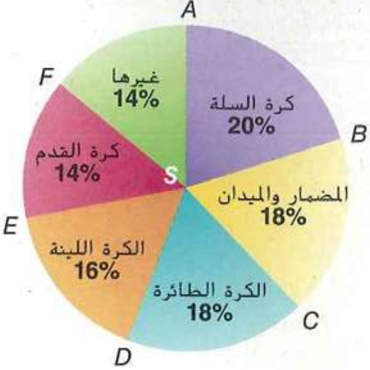
**مثال** إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$، فإنّ $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.
إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$، فإنّ $\angle 1 \cong \angle 2$.

سوف تثبت النظرية 6.1 في التدريب 521.

## مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد قياس الأقواس من التمثيلات البيانية للدوائر

**الرياضة** **عد إلى التمثيل البياني للدائرة. وجد كلاً من القياسات.**

**مشاركة الإناث في الرياضة**




**a.** $m\widehat{CD}$

$\widehat{CD}$ قوس أصغر. $m\widehat{CD} = m\angle CSD$

$\angle CSD$ تمثل 18% من الكلّ أو 18% من الدائرة.

$m\angle CSD = 0.18(360)$ بإيجاد النسبة 18% من 360.

$= 64.8$ بسّط.

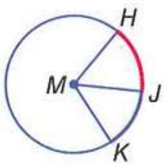
**b.** $m\widehat{BC}$

النسبتان المئويتان للكرة الطائرة ولعبة المضمار والميدان متساويتان، إذًا فالزاويتان المركزيتان متطابقتان والقوسان المتناظران متطابقان.

$m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 64.8$

**تمرين موجّه**

**3A.** $m\widehat{EF}$ **3B.** $m\widehat{FA}$

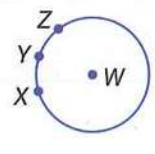



**القوسان المتجاوران** هما قوسان في الدائرة لهما نقطة مشتركةٌ واحدةٌ $\odot M$، بالتحديد. في الدائرة $\widehat{HJ}$ و $\widehat{JK}$ قوسان متجاوران. وكما في حالة الزوايا المتجاورة، فيمكنك جمع قياسات الأقواس المتجاورة.

### المسلّمة 6.1 مسلّمة جمع الأقواس

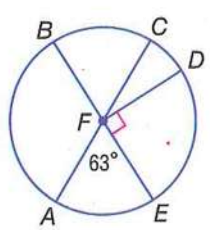
**الشرح** إن قياس قوس مشكّلٍ من قوسين متجاورين هو مجموع قياسي القوسين.

**مثال** $m\widehat{XYZ} = m\widehat{XY} + m\widehat{YZ}$




## مثال 4 استخدام جمع الأقواس لإيجاد قياس الأقواس

**جـد كلاً من القياسات في الدائرة $\odot F$.**




**a.** $m\widehat{AED}$

$m\widehat{AED} = m\widehat{AE} + m\widehat{ED}$ مسلّمة جمع الأقواس

$= m\angle AFE + m\angle EFD$ $m\widehat{AE} = m\angle AFE,\ m\widehat{ED} = m\angle EFD$

$= 63 + 90 \text{ or } 153$ بالتعويض

**b.** $m\widehat{ADB}$

$m\widehat{ADB} = m\widehat{AE} + m\widehat{EDB}$ مسلّمة جمع الأقواس

$= 63 + 180 \text{ or } 243$ $\widehat{EDB}$ نصف دائرة، إذًا $m\widehat{EDB} = 180$.

**تمرين موجّه**

**4A.** $m\widehat{CE}$ **4B.** $m\widehat{ABD}$

**الربط بتاريخ الرياضيات**

**إقليدس (265-325 ق.م.)**

تعدّ كتب إقليدس الـ 13 حول *العناصر* أعمالاً بالغة التأثير في العلم. وهي تؤسس للهندسة وفروع الرياضيات على نحوٍ منطقي. ويخصص كتاب *العناصر* الثالث للدوائر والأقواس والزوايا.

## 2 طول القوس

**طول القوس** هو المسافة بين النقطتين الطرفيتين على طول قوس، وتقاس بالوحدات الخطية. وبما أن القوس جزءٌ من دائرة، فإن طوله يساوي جزءً من محيطها.

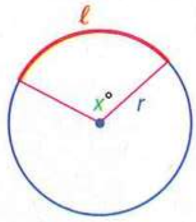
> **انتبه!**
> **طول القوس** يعطى طول القوس بالوحدات الخطية، كالسنتيمتر. ويعطى قياس القوس بالدرجات.

### المفهوم الأساسي طول القوس

**الشرح** نسبة **طول قوسٍ $\ell$** إلى **محيط** دائرةٍ يساوي نسبة **قياس القوس بالدرجات** إلى 360.

**تناسب** $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x}{360}$ أو

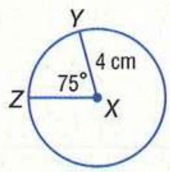
**المعادلة** $\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$




### مثال 5 إيجاد طول قوس

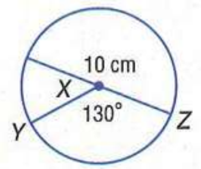
**جـد طول $\widehat{ZY}$ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.**

**a.**



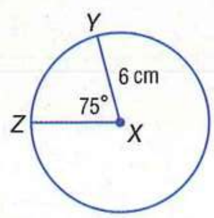

| | |
|---|---|
| معادلة طول القوس | $\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$ |
| بالتعويض | $= \frac{75}{360} \cdot 2\pi(4)$ |
| باستخدام آلة حاسبة. | $\approx 5.24$ cm |

**b.**




| | |
|---|---|
| معادلة طول القوس | $\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$ |
| بالتعويض | $= \frac{130}{360} \cdot 2\pi(5)$ |
| باستخدام آلة حاسبة. | $\approx 11.34$ cm |

**c.**




| | |
|---|---|
| معادلة طول القوس | $\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$ |
| بالتعويض | $= \frac{75}{360} \cdot 2\pi(6)$ |
| باستخدام آلة حاسبة. | $\approx 7.85$ cm |

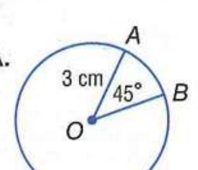
لاحظ أن للقوس $\widehat{ZY}$ القياس نفسه 75 في كلا المثالين 5a و 5c. ولكن طولي القوسين مختلفان. ويعود ذلك إلى أنهما في دائرتين لهما نصفا قطرٍ مختلفان.

> **نصيحة دراسية**
> **طريقة بديلة** كان من الممكن حساب أطوال الأقواس في الأمثلة 5a و 5b و 5c باستخدام تناسب أطوال الأقواس $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x}{360}$.

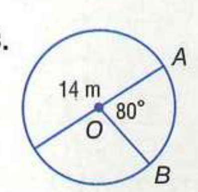
### تمرين موجّه

**جـد طول $\widehat{AB}$ ثمّ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.**

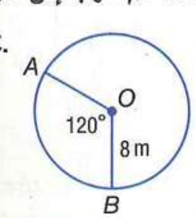
**5A.**




**5B.**



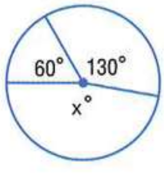

**5C.**



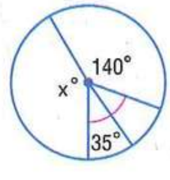
## التحقق من فهمك

**مثال 1** **جـد قيمة $x$.**

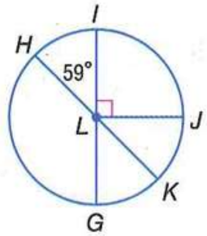
1.




2.




**مثال 2** **الضبط** $\overline{HK}$ و $\overline{IG}$ **قطران في الدائرة $\odot L$. حدّد إن كان كل قوسٍ قوسًا أكبر أو قوسًا أصغر أو نصف دائرة. ثم جـد قياسه.**




3. $m\widehat{IHJ}$ 4. $m\widehat{HI}$ 5. $m\widehat{HGK}$

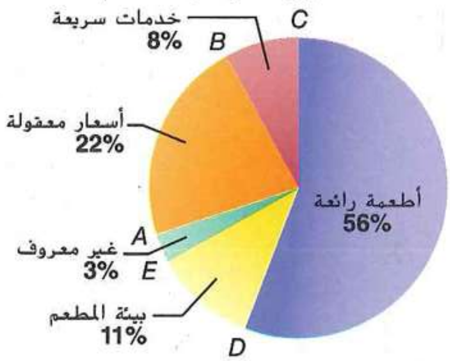
**مثال 3** 6. **المطاعم** يعرض التمثيل البياني نتائج استطلاع جرى على روّاد المطاعم بشأن أهمّ الجوانب التي يجب أن تتميز بها المطاعم التي يرتادونها.

**a.** جـد $m\widehat{AB}$.

**b.** جـد $m\widehat{BC}$.

**c.** صِف نوع القوس الذي تمثله الفئة "أطعمة رائعة".

**ما يريده مرتادو المطاعم**



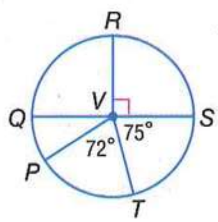

**موقع:** يو إس تودي

**مثال 4** $\overline{QS}$ **قطرٌ في الدائرة $\odot V$ جـد كلاً من القياسات.**

7. $m\widehat{STP}$

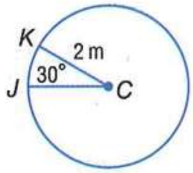
8. $m\widehat{QRT}$

9. $m\widehat{PQR}$

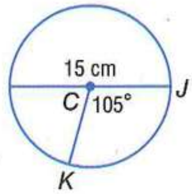



**مثال 5** **جـد طول $\widehat{JK}$ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.**

10.



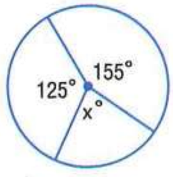

11.



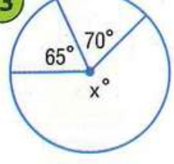

## التدريب وحل المسائل

**مثال 1** **جـد قيمة $x$.**

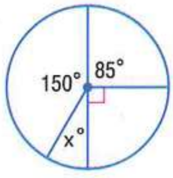
12.



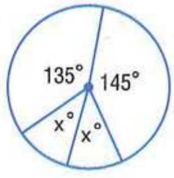

13.




14.

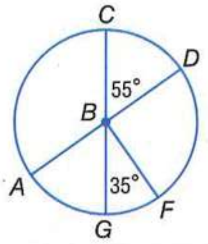



15.



مثال 2

$\overline{AD}$ و $\overline{CG}$ قطران في الدائرة $\odot B$. حدّد إن كان كل قوسٍ قوسًا أكبر أو قوسًا أصغر أو نصف دائرة. ثم جـد قياسه.




16. $m\widehat{CD}$
17. $m\widehat{AC}$
18. $m\widehat{CFG}$
19. $m\widehat{CGD}$
20. $m\widehat{GCF}$
21. $m\widehat{ACD}$
22. $m\widehat{AG}$
23. $m\widehat{ACF}$

مثال 3

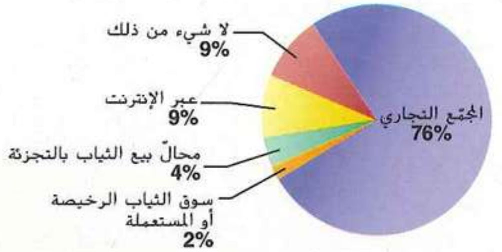
**24. التسوق** يعرض التمثيل البياني نتائج استبيانٍ سُئل فيه مراهقون عن المكان الأفضل لتسوّق الملابس بالنسبة إليهم.

**a.** ما قياسا القوسين المقابلين لفئتي للمجمع التجاري ومحالّ بيع الثياب بالتجزئة؟

**b.** صف نوعي القوسين المقابلين لفئتي "المجمع التجاري" وفئة "لا شيء من ذلك."

**c.** هل ثمة أيّ أقواس متطابقة في هذا التمثيل البياني؟ اشرح.

**أفضل الأماكن للتسوق بغرض شراء الثياب**




**25. تمثيل النماذج** يعرض الجدول نتائج استطلاع سئل فيه أشخاصٌ عن المدة التي يمكن أن تبقى فيها الأطعمة على الأرض مع بقاء تناولها آمنًا.

**a.** إذا أردت إنشاء تمثيل بياني دائري لهذه المعلومة، فكم سيكون قياس القوس المقابلُ لأول فئتين؟

**b.** صِف نوعي القوسين المقابلين للفئة الأولى والفئة الأخيرة.

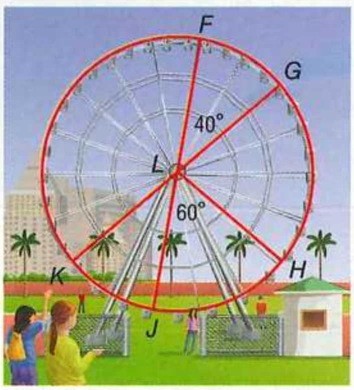
**c.** هل ثمّة أيّ أقواسٍ متطابقةٍ في هذا التمثيل البياني؟ اشرح.

| الطعام الساقط على الأرض | |
|---|---|
| **هل تأكل طعامًا سقط على الأرض؟** | |
| ليس من الآمن تناوله | 78% |
| ثلاث ثوان* | 10% |
| خمس ثوان* | 8% |
| عشر ثوان* | 4% |

**المصدر:** الجمعية الأمريكية لمرض السكري
* طول زمن بقاء الطعام على الأرض.

المثالان 4 ,2

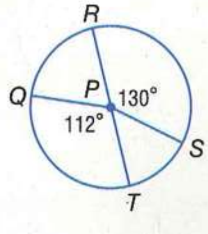
**الترفيه** استخدم الأرجوحة الدوارة الموضحة لإيجاد قياس كل مما يلي.




26. $m\widehat{FG}$
27. $m\widehat{JH}$
28. $m\widehat{JKF}$
29. $m\widehat{JFH}$
30. $m\widehat{GHF}$
31. $m\widehat{GHK}$
32. $m\widehat{HK}$
33. $m\widehat{JKG}$
34. $m\widehat{KFH}$
35. $m\widehat{HGF}$

مثال 5

**استخدم الدائرة $\odot P$ لإيجاد طول كل قوس. قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.**




.36 $\widehat{RS}$، إذا كان طول نصف القطر 2cm

.37 $\widehat{QT}$، إذا كان طول قطر الدائرة 9 cm

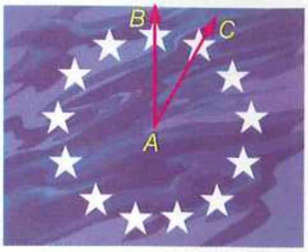
.38 $\widehat{QR}$، إذا كان $PS = 4$ mm

.39 $\widehat{RS}$، إذا كان $RT = 15$ cm

.40 $\widehat{QRS}$، إذا كان $RT = 11$ m

.41 $\widehat{RTS}$، إذا كان $PQ = 3$ m

**التاريخ** يوضح الشكل نجومًا موزعةً حول نقطة مركزية.




**42.** ما هو قياس الزاوية المركزية $A$؟ اشرح كيف حدّدت إجابتك.

**43.** إذا ضوعِف طول قطر الدائرة، فما تأثير ذلك في طول القوس من النجمة $B$ إلى النجمة التالية $C$؟

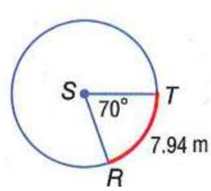

**44. المزارع** *لمزرعة البيتزا* في ماديرا بكاليفورنيا شكل دائرة مقسّمة إلى ثمان شرائح متساوية، كما هو موضح في الجهة اليسرى. وتستخدم كل دائرةٍ لزراعة أو رعي مكوّنات البيتزا.

**a.** فما هي القياسات الكلية للشرائح التي تضم الزيتون والطماطم والفليفلة؟

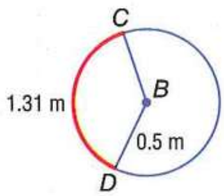
**b.** يبلغ قطر الدائرة 38.1 m. فما طول قوس الشريحة الواحدة؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

**الاستنتاج جـد كلاً من القياسات. وقرّب كل قياسٍ خطيٍ إلى أقرب مئةٍ وكل قياس قوسٍ إلى أقرب درجة.**

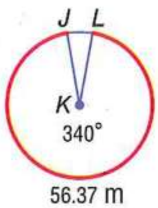
**45.** محيط الدائرة $\odot S$



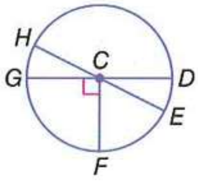

**46.** $m\widehat{CD}$




**47.** نصف قطر الدائرة $\odot K$




**الجبر في الدائرة $\odot C$، لدينا $m\angle HCG = 2x$ و $m\angle HCD = 6x + 28$.**
**جـد كلاً من القياسات.**

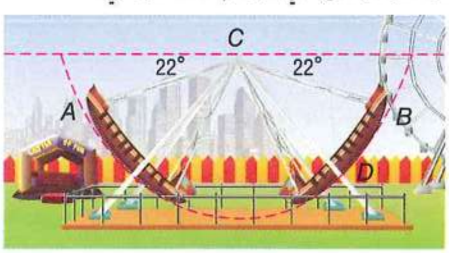



**48.** $m\widehat{EF}$

**49.** $m\widehat{HD}$

**50.** $m\widehat{HGF}$

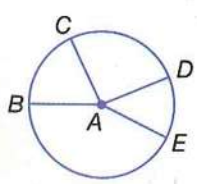
**51 ألعاب الملاهي** تتبع أرجوحة سفينة القراصنة مسارًا نصف دائري، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.




**a.** ما قياس $m\widehat{AB}$؟

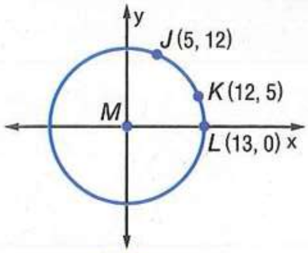
**b.** إذا كان $CD = 62$ m، فما طول $\widehat{AB}$؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

**52. البرهان** اكتب برهانًا من عمودين للنظرية 6.1




**المعطى:** $\angle BAC \cong \angle DAE$

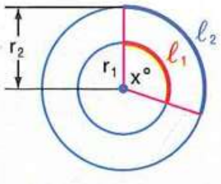
**المطلوب برهانه:** $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$




**53** **الهندسة الإحداثية** في التمثيل البياني، تقع النقطة $M$ عند نقطة الأصل. جـد كلاً من القياسات في الدائرة $\odot M$. وقرّب كلّ قياسٍ خطيٍ إلى أقرب جزءٍ من مئة وكل قياس قوسٍ إلى أقرب درجة مئوية.

**a.** $m\widehat{JL}$ **b.** $m\widehat{KL}$ **c.** $m\widehat{JK}$

**d.** طول $\widehat{JL}$ **e.** طول $\widehat{JK}$




**54.** **طول القوس وقياس الراديان** في هذه المسألة، سوف تستخدم دائراتٍ متحدة المركز لتثبت أن طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية في دائرة يعتمد على نصف قطر الدائرة.

**a.** قارن قياسي القوس $\ell_1$ والقوس $\ell_2$. ثمّ قارن طولي القوس $\ell_1$ والقوس $\ell_2$. إلامَ تشير المقارنتان؟

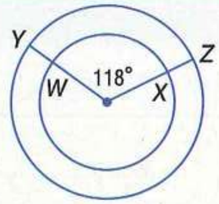
**b.** استخدم تحويلات التشابه (تغيير الأبعاد/التمدّد) لشرح السبب في أن طول القوس $\ell$ الذي تحصره زاوية مركزية في دائرة يتناسب مع نصف قطر الدائرة $r$. أي اشرح ما يمكن أن لاحظه في هذا التمثيل، $\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2}$.

**c.** اكتب تعبيرين لطولي القوسين $\ell_1$ و $\ell_2$. واستخدم هذين التعبيرين لتحديد ثابت التناسب $k$ في $\ell = kr$.

**d.** التعبير الخاص بـ $k$ والذي كتبته في الجزء **c** يعطي *قياس* زاوية بالراديان. فاستخدمه لإيجاد القياس بالراديان لزاوية قياسها 90°.

## مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا



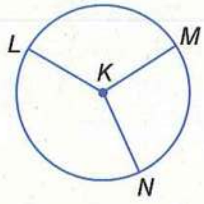

**55.** **تحليل خاطئ** تقول سالي إن $\widehat{WX}$ و $\widehat{YZ}$ متطابقتان نظرًا إلى أن زاويتيهما المركزيتين لهما القياس نفسه. وتقول رنا إنهما غير متطابقتين. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

**الفرضيات** **حدّد ما إذا كانت كل عبارةٍ مما يلي صحيحةً *أحيانًا* أو *دائمًا* أو *غير صحيحة على الإطلاق*. واشرح استنتاجك.**

**56.** قياس قوسٍ أصغر أقل من 180.

**57.** إذا كانت زاويةٌ مركزيةٌ منفرجة، فالقوس المقابل لها قوسٌ أكبر.

**58.** يعتمد مجموع قياسي القوسين المتجاورين في دائرة على قياس نصف القطر.




**59.** **التحدي** يحقق قياس $\widehat{LM}$ و $\widehat{MN}$ و $\widehat{NL}$ النسبة 5:3:4. جـد قياس كل قوس.

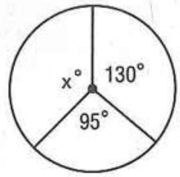
**60.** **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم دائرةً وحدّد ثلاث نقاط على محيطها. قدّر قياس الأقواس الثلاثة غير المتداخلة المشكّلة. ثم استخدم منقلةً لإيجاد قياس كل قوس. ودوّن قياس الأقواس على دائرتك.

**61.** **التحدي** التوقيت الظاهر على ساعةٍ ذات عقارب هو 8:10. فما قياس الزاوية التي يشكّلها عقربا الساعة؟

**62.** **الكتابة في الرياضيات** صِف الأنواع الثلاثة المختلفة للأقواس في دائرة إضافةً إلى طريقة إيجاد قياس كلٍ منها.

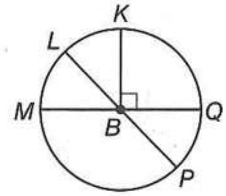
## تدريب على الاختبار المعياري

**63.** **ما هي قيمة $x$؟**




**A** 120
**B** 135
**C** 145
**D** 160

**64.** **إجابة شبكية** في الدائرة $\odot B$، $m\angle LBM = 3x$ و $m\angle LBQ = 4x + 61$. ما قياس الزاوية $\angle PBQ$؟

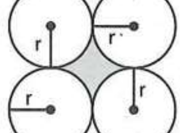



**65.** **الجبر** يمثّل عرض مستطيلٍ بـ $x$ وطوله بـ $y$. فما التعبير الذي يمثل مساحة المستطيل على النحو الأفضل إذا ضوعف طوله وعرضه ثلاث مرات؟

**F** $3xy$ **H** $9xy$
**G** $3(xy)^2$ **J** $(xy)^3$

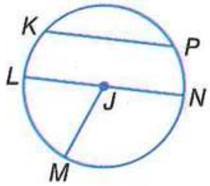
**66.** SAT/ACT ما هي مساحة المنطقة المظللة إذا كان $r = 4$؟

**A** $64 - 16\pi$
**B** $16 - 16\pi$
**C** $16 - 8\pi$
**D** $64 - 8\pi$
**E** $64\pi - 16$




## مراجعة شاملة

**عد إلى الدائرة $\odot J$.** (الدرس 1-6)




**67.** سَمِّ مركز الدائرة.

**68.** حدّد وترًا هو قطرٌ في الدائرة أيضًا.

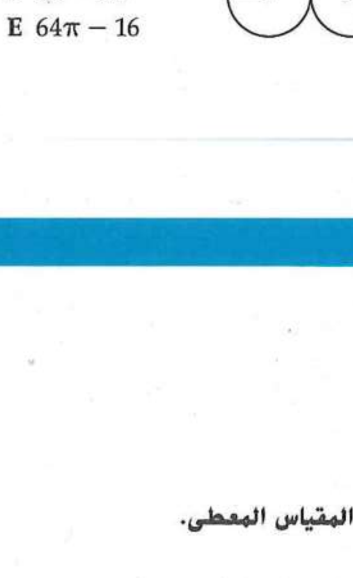
**69.** إذا كان طول $LN = 12.4$، فما طول $JM$؟

**مثّل صورة كل مضلعٍ له الرؤوس المعطاة بيانيًا بعد تغيير للأبعاد مركزه نقطة الأصل ووفق معامل المقياس المعطى.**

**70.** $X(-1, 2), Y(2, 1), Z(-1, -2); r = 3$

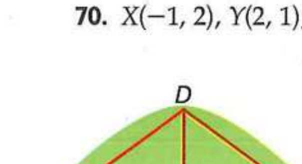
**71.** $A(-4, 4), B(4, 4), C(4, -4), D(-4, -4); r = 0.25$

**72.** **البيسبول** يوضح الرسم التخطيطي أبعاد منتزه كوميسكي في شيكاغو. $\overline{BD}$ هي القطعة المستقيمة من القاعدة الرئيسية إلى النهاية المقابلة للملعب، و $\overline{AE}$ هي القطعة المستقيمة من ميسرة الملعب إلى ميمنته. فإذا كان لاعب منتصف الملعب يقف عن النقطة $C$، فكم يبعد عن القاعدة الرئيسية؟

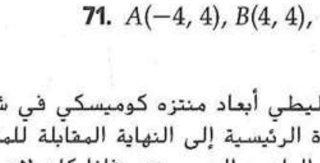



**جـد قيمة $x, y, z$.**

**73.**




**74.**




## مراجعة المهارات

**جـد قيمة $x$.**

**75.** $24^2 + x^2 = 26^2$

**76.** $x^2 + 5^2 = 13^2$

**77.** $30^2 + 35^2 = x^2$

# الدرس 6-3 الأقواس والأوتار

| لماذا؟ | الحالي | السابق |
|---|---|---|
| تستخدم إطارات التطريز في الحياكة وخياطة الملاحف والتطريز المتصالب والعادي. كل نقطتين طرفيتين في ندفة الثلج المبيّنة هما نقطتان طرفيتان لوترٍ وقوسٍ في الوقت نفسه. | 1 التعرّف على العلاقات بين الأقواس والأوتار واستخدامها. 2 التعرّف على العلاقات بين الأقواس والأوتار و الأقطار واستخدامها. | لقد استخدمت العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد قياسات مجهولة. |


**ممارسات في الرياضيات**
استخدام نماذج الرياضيات.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

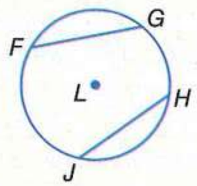
## 1 الأقواس والأوتار

*القوس* هو قطعة مستقيمة تقع نقطتاها الطرفيتان على محيط الدائرة. وإذا لم يكن الوتر قطرًا، فإن نقطتيه الطرفيتين تقسمان الدائرة إلى قوسٍ أكبر وقوسٍ أصغر.

### النظرية 6.2

**الشرح** في الدائرة الواحدة أو في دائرتين متطابقتين، يتطابق قوسان أصغران إذا وفقط إذا كان وتراهما المتناظران متطابقين.

**مثال** $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$ إذا وفقط إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$.

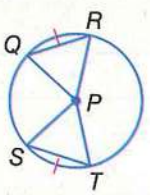



### البرهان النظرية 6.2 (الجزء 1)

**المعطى:** في الدائرة $\odot P$، $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$

**المطلوب إثباته:** $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

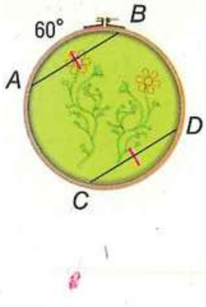
**البرهان:**




| العبارات | المبرّرات |
|---|---|
| 1. $\odot P, \widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ | 1. المعطيات |
| 2. $\angle QPR \cong \angle SPT$ | 2. إذا كان قوسان متطابقين ≅، فإن زاويتيهما المركزيتان ⦣ متطابقتان ≅. |
| 3. $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$ | 3. جميع أنصاف الأقطار في دائرةٍ متطابقة ≅. |
| 4. $\triangle PQR \cong \triangle PST$ | 4. ضلع-زاوية-ضلع |
| 5. $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ | 5. مسلمة تطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة |

ستُثبتُ الجزء 2 من النظرية 6.2 في التمرين 25.

### مثال 1 من الحياة اليومية استخدام الأوتار المتطابقة لإيجاد قياس قوس




**حِرَف في إطار التطريز،** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $m\widehat{AB} = 60$.

**جـد** $m\widehat{CD}$.

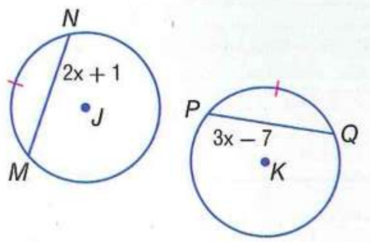
$\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وتران متطابقان، فإن القوسين $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ متطابقان.

$m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 60$

**تمرين موجّه**

1. إذا كان $m\widehat{AB} = 78$ في إطار التطريز، فجـد $m\widehat{CD}$.

## مثال 2 استخدام الأقواس المتطابقة لإيجاد أطوال الأوتار



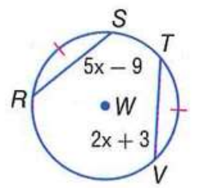
**الجبر في الشكلين، لدينا $\odot J \cong \odot K$ و $\widehat{MN} \cong \widehat{PQ}$.**
**جـد $PQ$.**

$\widehat{MN}$ و $\widehat{PQ}$ قوسان متطابقان في دائرتين متطابقتين، إذًا فالوتران المتناظران $\overline{MN}$ و $\overline{PQ}$ متطابقان.

| | |
|---|---|
| بحسب تعريف القطع المستقيمة المتطابقة | $MN = PQ$ |
| بالتعويض | $2x + 1 = 3x - 7$ |
| بسّط. | $8 = x$ |

إذًا، $PQ = 3(8) - 7$ أو 17.

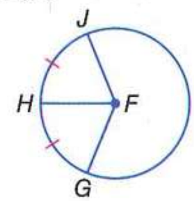
### تمرين موجّه



**2.** في الدائرة $\odot W$، $\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$. جـد $RS$.

**نصيحة دراسية**

**منصّفات الأقواس** في الشكل أدناه، $\overline{FH}$ منصفٌ للقوس $\widehat{JG}$.



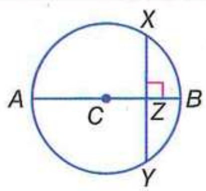
## 2 الأقواس والأوتار المنصّفة

إذا قسم مستقيمٌ أو قطعةٌ مستقيمةٌ أو شعاعٌ قوسًا إلى قوسين متطابقين، إذًا فهو ينصّف ذلك القوس.

### النظريات

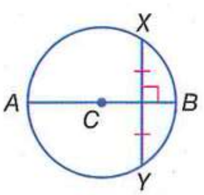
**6.3** إذا كان أحد أقطار دائرة (أو أحد أنصاف أقطارها) عموديًا على وترٍ فيها، فإنه يقطع قوسها.

**مثال** إذا كان نصف القطر $\overline{AB}$ عموديًا على الوتر $\overline{XY}$، فإن $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}$ و $\widehat{XB} \cong \widehat{BY}$.



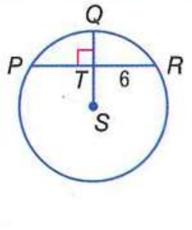
**6.4** المنصّف العمودي لوترٍ هو قطرٌ (أو نصف قطرٍ) في الدائرة.

**مثال** إذا كان $\overline{AB}$ منصفًا عموديًا للوتر $\overline{XY}$، فإن $\overline{AB}$ قطرٌ في الدائرة $\odot C$.



سوف تقوم بإثبات نظريتي 6.3 و 6.4 من خلال التمرينين 26 و 28 على الترتيب.

## مثال 3 استخدام نصف قطر عمودي على وتر



**في الدائرة $\odot S$، $m\widehat{PQR} = 98$. جـد $m\widehat{PQ}$.**

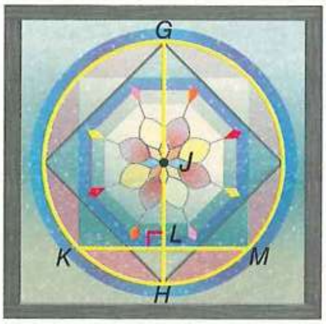
نصف القطر $\overline{SQ}$ عمودي على الوتر $\overline{PR}$. إذًا بموجب النظرية 6.3، $\overline{SQ}$ ينصّف $\widehat{PQR}$. لذلك، فإن $m\widehat{PQ} = m\widehat{QR}$.

بالتعويض، $m\widehat{PQ} = \frac{98}{2}$ أو 49.

### تمرين موجّه

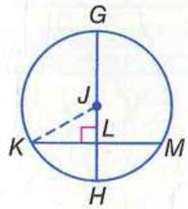
**3.** في الدائرة $\odot S$، جـد $PR$.

## مثال 4 من الحياة اليومية استخدام قطر عمودي على وتر




**الزجاج الملوّن في النافذة المصنوعة من الزجاج الملون، طول القطر $\overline{GH}$ يساوي 30 cm و طول الوتر يساوي $\overline{KM}$ 22 cm. جـد $JL$.**

**الخطوة 1** ارسم نصف القطر $\overline{JK}$.




يشكّل هذا مثلثًا قائمًا $\triangle JKL$.

**الخطوة 2** جـد $JK$ و $KL$.

بما أن $GH = 30\ cm$، فإن $JH = 15\ cm$. جميع أنصاف أقطار دائرةٍ متطابقة، إذًا $JK = 15\ cm$.

بما أن القطر $\overline{GH}$ عموديّ على $\overline{KM}$، $\overline{GH}$ ينصّف الوتر $\overline{KM}$ بموجب النظرية 6.3. إذًا، $KL = \frac{1}{2}(22)$ أو 11 cm.

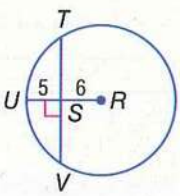
**الخطوة 3** استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة $JL$.

| | |
|---|---|
| $KL^2 + JL^2 = JK^2$ | نظرية فيثاغورس |
| $11^2 + JL^2 = 15^2$ | $JK = 15$ و $KL = 11$ |
| $121 + JL^2 = 225$ | بسّط. |
| $JL^2 = 104$ | بطرح 121 من كل طرف. |
| $JL = \sqrt{104}$ | بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف. |

إذًا طول $JL$ يساوي $\sqrt{104}$ أو 10.20 cm.

### تمرين موجّه

**4.** في الدائرة $\odot R$. جـد $TV$. قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.




### الربط بالحياة اليومية

لتشكيل النوافذ الزجاجية الملوّنة، يسخّن الزجاج إلى حرارة 2000 درجة مئوية، إلى أن يصبح قوامه مشابهًا لقوام الحلوى. وتنتج الألوان عبر إضافة أكاسيد معدنية.

**المصدر:** الزجاج الفنّي الملوّن من ربح

### نصيحة دراسية

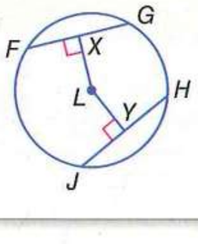
**رسم قطع مستقيمة** يمكنك إضافة أي معلوماتٍ تعرفها إلى الشكل لمساعدتك في حل المسألة. في المثال 4، رُسم نصف القطر $\overline{JK}$.

إضافةً إلى النظرية 6.2، يمكنك استخدام النظرية التالية لتحديد ما إذا كان وتران في دائرةٍ متطابقين.

### النظرية 6.5

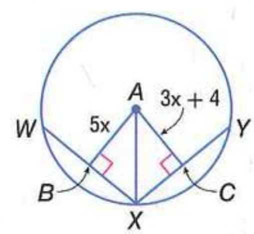
**الشرح** في الدائرة الواحدة أو في دائرتين متطابقتين، يتطابق وتران إذا وفقط إذا كانا متساويي البعد عن المركز.

**مثال** $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ إذا وفقط إذا كان $LX = LY$.




سوف تقوم بإثبات النظرية 6.5 في التمرينين 29 و 30.

## مثال 5 الأوتار متساوية البعد عن المركز




**الجبر في الدائرة $\odot A$، لديك $WX = XY = 22$. جـد $AB$.**

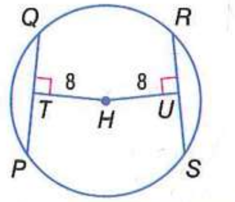
بما أن الوترين $\overline{WX}$ و $\overline{XY}$ متطابقان، فهما متساويا البعد عن $A$. إذًا، $AB = AC$.

$AB = AC$

$5x = 3x + 4$ بالتعويض

$x = 2$ بسّط.

إذًا، $AB = 5(2)$ أو 10.



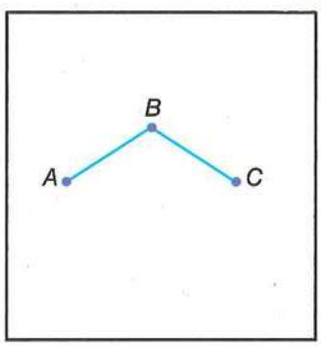

**تمرين موجّه**

**5.** في الدائرة $\odot H$، $PQ = 3x - 4$ و $RS = 14$. جـد قيمة $x$.

يمكنك استخدام النظرية 6.5 لإيجاد النقطة متساوية البعد عن ثلاث نقاطٍ لا تقع على استقامةٍ واحدة.

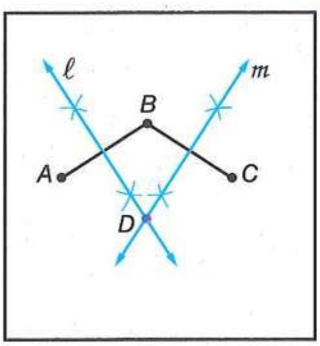
### الإنشاء رسم دائرة تمرّ من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

**الخطوة 1**



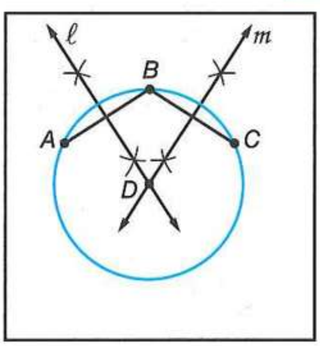

ارسم النقاط الثلاثة التي ليست على استقامة واحدة، وهي $A, B, C$. ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$.

**الخطوة 2**




أنشئ المنصفين العموديين $\ell$ و $m$ لـ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$. سَمِّ نقطة التقاطع $D$.

**الخطوة 3**

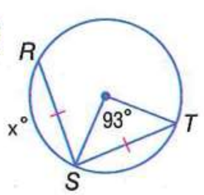



بموجب النظرية 6.4، يضم المستقيمان $\ell$ و $m$ قطرين للدائرة $\odot D$. ضع رأس الفرجار على النقطة $D$، وارسم دائرةً تمر بالنقاط $A$ و $B$ و $C$.

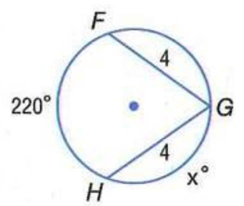
## التحقق من فهمك

**المثالان 1 و 2 الجبر** جـد قيمة $x$.

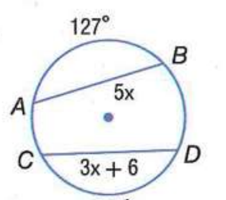
**1.**




**2.**

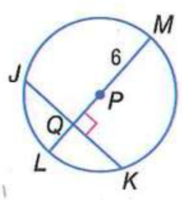



**3.**




**المثالان 3 و 4 في الدائرة $\odot P$، لديك $JK = 10$ و $m\widehat{JLK} = 134$. جـد كلاً من القياسات.**

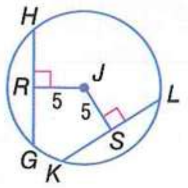
**قرّب إلى أقرب جزء من مئة.**




**4.** $m\widehat{JL}$

**5.** $PQ$

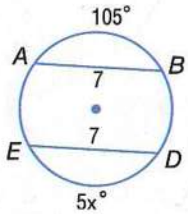
**مثال 5** **6.** في الدائرة $\odot J$، لديك $GH = 9$ و $KL = 4x + 1$. جــد قيمة $x$.



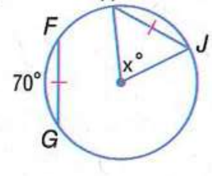

## التدريب وحل المسائل

**المثالان 1 و 2** **الجبر** **جــد قيمة $x$.**

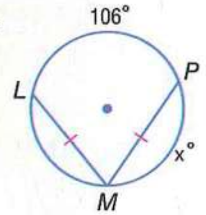
**7.**



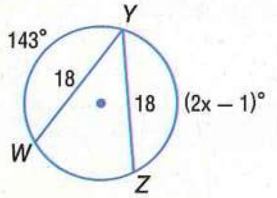

**8.**



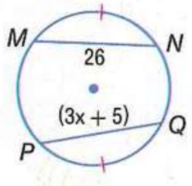

**9.**



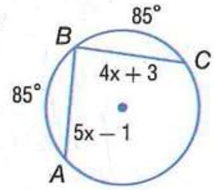

**10.**



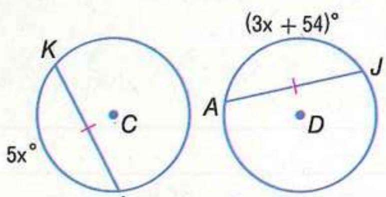

**11.**



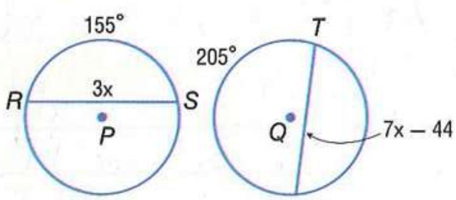

**12.**



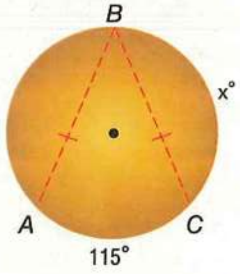

**13** $\odot C \cong \odot D$




**14.** $\odot P \cong \odot Q$



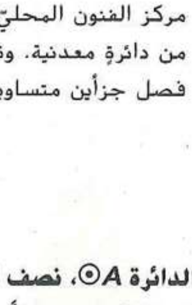

**15.** **التمثيل بالنماذج** تحضر وفاء دورةً في صناعة الحليّ في مركز الفنون المحليّ. وهي تريد تشكيل قرطين مستطيلين من دائرةٍ معدنية. وتعلم أن $\widehat{AC}$ يساوي 115. فإذا أرادت فصل جزأين متساويين بحيث يكون $\widehat{AB} = \widehat{BC}$، ما قياس $x$؟




**المثالان 3 و 4** **في الدائرة $\odot A$، نصف القطر يساوي 14 و $CD = 22$. جــد كلاً من القياسات. أقرب جزءٍ من مئة عند الضرورة.**

**16.** $CE$

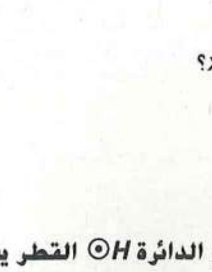
**17.** $EB$



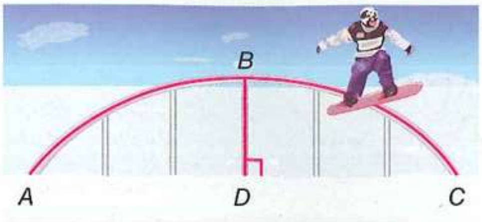

**في الدائرة $\odot H$ القطر يساوي 18 و $LM = 12$ و $m\widehat{LM} = 84$. جــد كلاً من القياسات. قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة عند الضرورة.**

**18.** $m\widehat{LK}$

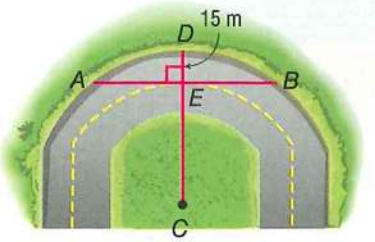
**19.** $HP$



**20. التزلج على الجليد** المسار الموضح المخصص للتزحلق على الجليد هو دائرة فيها $\overline{BD}$ جزء من القطر. فإذا كان $\widehat{ABC}$ يساوي حوالي 32% من دائرة كاملة، فماذا يساوي $m\widehat{AB}$؟

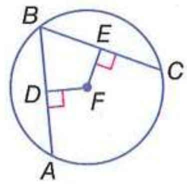



**21 الطرقات** الطريق المنحني الموجود على اليسار هو جزء من الدائرة ⊙C والتي يساوي نصف قطرها 88 m. ما هو طول AB؟ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

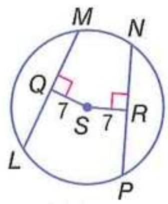



مثال 5

**22. الجبر** في الدائرة $\odot F$، $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، $DF = 3x - 7$ و $FE = x + 9$. ما قيمة $x$؟



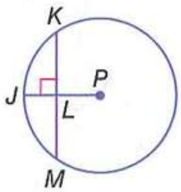

**23. الجبر** في الدائرة $\odot S$، $LM = 16$ و $PN = 4x$. ما قيمة $x$؟




**البرهان** **اكتب برهانًا من عمودين.**

**24. المعطى:** $\odot P$، $\overline{KM} \perp \overline{JP}$

**المطلوب برهانه:** $\overline{JP}$ ينصّف $\overline{KM}$ و $\widehat{KM}$.

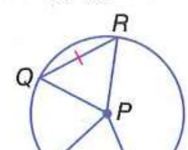



**البرهان** **اكتب النوع المحدد من البراهين.**

**25.** فقرة برهان للنظرية 6.2، الجزء 2

**المعطى:** $\odot P$، $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

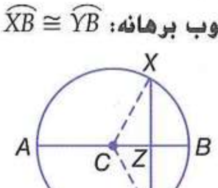
**المطلوب برهانه:** $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$



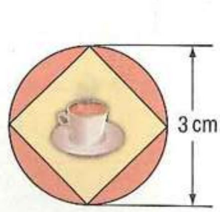

**26.** برهان من عمودين النظرية 6.3

**المعطى:** $\odot C$، $\overline{AB} \perp \overline{XY}$

**المطلوب برهانه:** $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}, \widehat{XB} \cong \widehat{YB}$




**27. التصميم** تصمّم أنيسة شعارًا لمقهى صديقتها وفقًا للتصميم المبيّن على الجهة اليسرى، حيث تتساوى الأوتار من حيث الطول. فما قياس كلٍ من الأقواس وطول كلٍ من الأوتار؟




**28. الفرضيات** اكتب برهانًا من عمودين للنظرية 6.4.

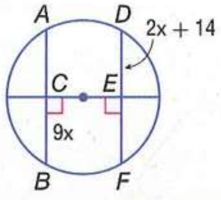
**الفرضيات** **اكتب برهانًا من عمودين للجزء المشار إليه في النظرية 6.5.**

**29.** في الدائرة، إذا كان وتران متساويا البعد عن مركز الدائرة، فإنهما يكونان متطابقين.

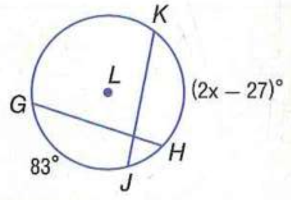
**30.** في الدائرة، إذا كان وتران متطابقين، فإنهما يكونان متساويي البعد عن مركز الدائرة.

**الجبر** جـد قيمة $x$.

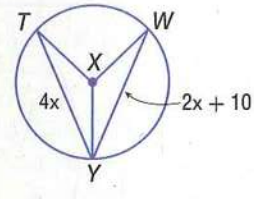
**31.** $\overline{AB} \cong \overline{DF}$



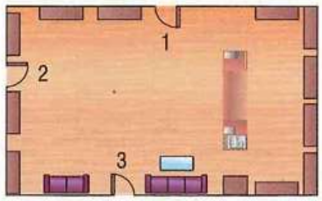

**32.** $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$




**33.** $\widehat{WTY} \cong \widehat{TWY}$

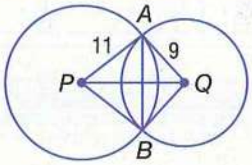



**34.** **الإعلان** يريد أحد موظفي متجرٍ للكتب أن ينصب شاشةً لعرض الكتب الجديدة. فإذا كانت هناك ثلاثة مداخل إلى المتجر كما هو موضح على الجهة اليمنى، فأين يجب أن توضع الشاشة للحصول على الظهور الأفضل أمام الروّاد؟




## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

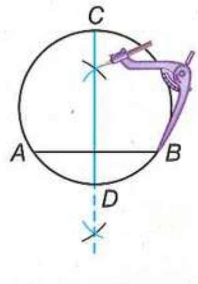
**35.** **التحدّي** الوتر المشترك $\overline{AB}$ بين $\odot P$ و $\odot Q$ عموديٌّ على القطعة المستقيمة التي تربط بين مركزي الدائرتين. فإذا كان $AB = 10$، فما هو طول $\overline{PQ}$؟ اشرح استنتاجك.



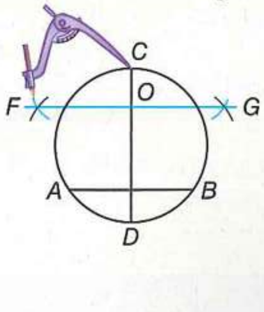

**36.** **التبرير** في الدائرة، $\overline{AB}$ هو قطر و $\overline{HG}$ هو وترٌ ينصّف $\overline{AB}$ عند النقطة $X$. هل من الصحيح *أحيانًا* أم *دائمًا* أم من غير *الصحيح* على الإطلاق أن $HX = GX$؟ اشرح.

**37.** **التحدّي** استخدم فرجارًا لرسم دائرةٍ فيها الوتر $\overline{AB}$. عد إلى عملية الإنشاء هذه من أجل المعادلة التالية.

**الخطوة 1** أنشئ $\overline{CD}$، وهو المنصّف العمودي لـ $\overline{AB}$




**الخطوة 2** أنشئ $\overline{FG}$، وهو المنصّف العمودي لـ $\overline{CD}$. سَمِّ نقطتي التقاطع $O$.




**a.** استخدم برهانًا غير مباشرٍ لتبيّن أن $\overline{CD}$ يمرّ بمركز الدائرة على افتراض أن مركز الدائرة *لا* يقع على $\overline{CD}$.

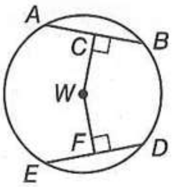
**b.** برهن أن النقطة $O$ هي مركز الدائرة.

**38.** **مسألة غير محددة الإجابة** أنشئ دائرةً وارسم وترًا فيها. قِس طول الوتر و بعده عن مركز الدائرة. وجـد طول نصف قطرها.

**39.** **الكتابة في الرياضيات** إذا ضوعف قياس قوسٍ في دائرةٍ ثلاث مرات، فهل سيكون وتر القوس الجديد أطول بثلاثة أمثال وتر القوس الأصلي؟ اشرح استنتاجك.

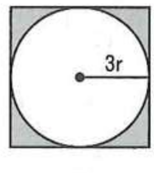
## تدريب على الاختبار المعياري

**40.** إذا كان $CW = WF$ و $ED = 30$. فما طول $DF$؟




**A** 60
**B** 45
**C** 30
**D** 15

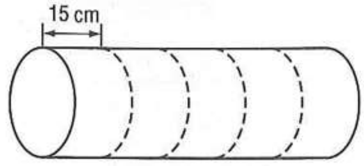
**41. سؤال جبري** اكتب نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع بأبسط صورة.



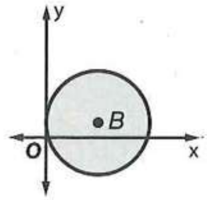

**F** $\frac{\pi}{4}$ **H** $\frac{3\pi}{4}$

**G** $\frac{\pi}{2}$ **J** $\pi$

**42. إجابة قصيرة** الأنبوب المبيّن مقسّمٌ إلى خمسة مقاطع. فما طول الأنبوب بالأمتار (m)؟




**43. SAT/ACT** النقطة $B$ مركز لدائرةٍ مماسيةٍ مع المحور الرأسي $y$، وإحداثيا النقطة $B$ هما (3, 1). فما هي مساحة الدائرة؟

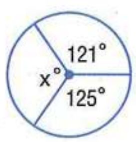



**A** $\pi$ وحدة مربعة **D** $6\pi$ وحدة مربعة
**B** $3\pi$ وحدة مربعة **E** $9\pi$ وحدة مربعة
**C** $4\pi$ وحدة مربعة

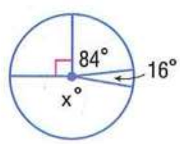
## مراجعة شاملة

**جـد قيمة $x$.** (الدرس 2-6)

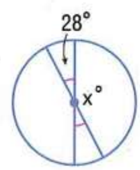
**44.**




**45.**




**46.**




**47. حِرَف** شكّلت هلا نقشًا لتطريز أزهارٍ على سطح لحاف، حيث شرعت برسم مخمّسٍ منتظمٍ طوله 3.5 cm على كل طرف. ثم أضافت نصف دائرةٍ إلى كل ضلعٍ من أضلاع خماسي الأضلاع لتشكّل شكل خمس بتلات. فكم سنتيمترًا سوف تحتاج من القصاصات الذهبية لتزيين حواف 10 أزهار؟ قرّب إلى أقرب سنتيمتر. (الدرس 1-6)

**حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأعداد تمثّل قياسات أضلاع مثلث. وإذا كان ذلك، صنّف المثلث على أنه *حادّ الزاوية* أو *منفرج الزاوية* أو *قائم الزاوية*. وبرّر إجابتك.**

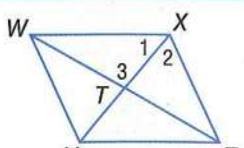
**48.** 8, 15, 17

**49.** 20, 21, 31

**50.** 10, 16, 18

## مراجعة المهارات

**الجبر إذا كان الشكل الرباعي $WXZY$ عبارة عن معيّن فجـد كلاً من القيم أو القياسات.**

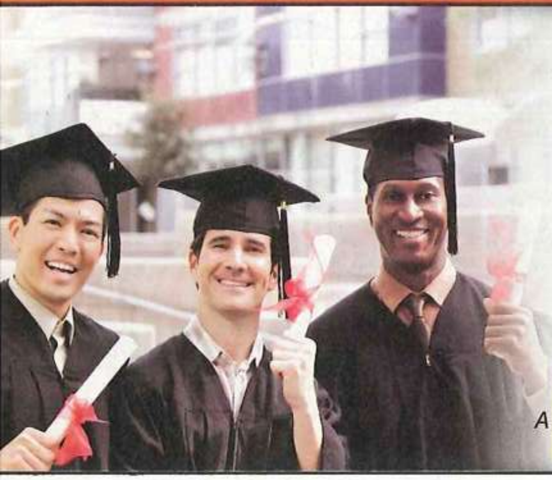


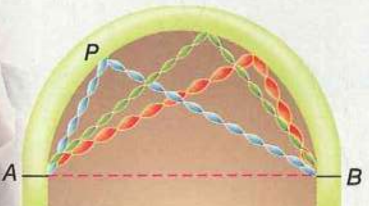

**51.** إذا كانت $m\angle 3 = y^2 - 31$، فجـد قيمة $y$.

**52.** إذا كانت $m\angle XZY = 56$، فجـد قيمة $m\angle YWZ$.

# الدرس 6-4 الزوايا المحيطية

| ..السابق | ..الحالي | ..لماذا |
|---|---|---|
| ● جـدت قياس الزوايا الداخلية لمضلعات. | ● **1** إيجاد قياس الزوايا المحيطية.<br>**2** إيجاد قياس المضلعات المحاطة بدائرة. | ● يضم المدخل الخاص بركن احتفال التخرج من المدرسة قوسًا بشكل نصف دائرة. تُربط أشرطةٌ تزيينيةٌ إلى أحد الطرفين عند النقطة $A$ وإلى الطرف الآخر عند النقطة $B$. ويمكن حينها ربط وسط كل شريط تزيينٍ إلى نقطة مختلفة $P$ تقع على طول القوس. |



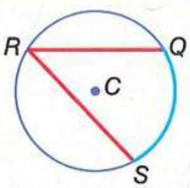



**المفردات الجديدة**
الزاوية المحيطية
inscribed angle
القوس المحصور
intercepted arc

**ممارسات في الرياضيات**
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

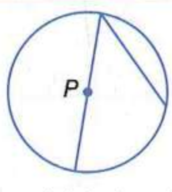
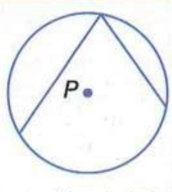
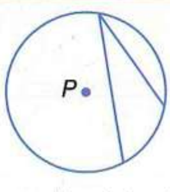
## 1 الزوايا المحيطية

لاحظ أن الزاوية التي يشكلها كل شريط زينةٍ تبدو متطابقة، وذلك بغض النظر عن موقع وجود النقطة $P$ على طول القوس. إن **للزاوية المحيطية** رأسًا يقع على محيط الدائرة وضلعين يضمّان قوسي الدائرة. في الدائرة $\odot C$ لدينا، $\angle QRS$ زاوية محيطية.




إن **للقوس المحصور** نقطتين طرفيتين على ضلعي الزاوية المحصورة ويقع في داخل الزاوية المحيطية. في الدائرة $\odot C$، القوس الأصغر $\widehat{QS}$ محصورٌ بالزاوية $\angle QRS$.

ثمّة ثلاث حالاتٍ للزاوية المحيطية في الدائرة.

| الحالة 1 | الحالة 2 | الحالة 3 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| المركز $P$ على ضلعٍ في الزاوية المحيطية. | المركز $P$ داخل الزاوية المحيطية. | المركز $P$ خارج الزاوية المحيطية. |

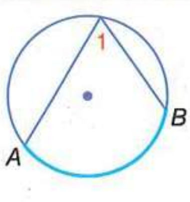
في الحالة 1، يكون ضلع الزاوية قطرًا في الدائرة.

وتنطبق النظرية التالية على كلٍ من هذه الحالات.

### النظرية 6.6 نظرية الزوايا المحيطية

**الشرح** إذا كانت هناك زاوية محيطية في دائرة، فإن قياس الزاوية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره.

**مثال** $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$ و $m\widehat{AB} = 2m\angle 1$




ستبرهن الحالتين 2 و 3 من نظرية الزاوية المحيطية في التمرينين 37 و 38.

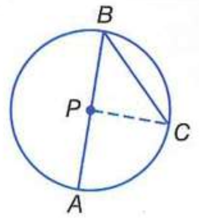
**الربط بالمفردات**

**محاط**

**الاستخدام اليومي:** مكتوب على سطح أو داخل سطح، كرسم نقش داخل خاتم

**الاستخدام الرياضي:** ملامسة أضلاع شكلٍ آخر (أو الجزء الداخلي منه)

## البرهان نظرية الزاوية المحيطية (الحالة 1)



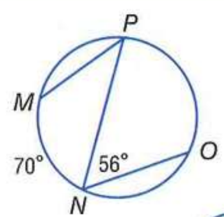

**المعطى:** $\angle B$ زاوية محيطية في الدائرة $\odot P$.

**المطلوب إثباته:** $m\angle B = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$

**البرهان:**

| العبارات | المبرّرات |
|---|---|
| 1. ارسم نصف قطر مساعد $\overline{PC}$. | 1. تحدد النقطتان مستقيمًا. |
| 2. $\overline{PB} \cong \overline{PC}$ | 2. جميع أنصاف الأقطار في الدائرة متطابقة $\cong$. |
| 3. $\triangle PBC$ مثلث متساوي الساقين. | 3. تعريف المثلث متساوي الساقين |
| 4. $m\angle B = m\angle C$ | 4. نظرية المثلث متساوي الساقين |
| 5. $m\angle APC = m\angle B + m\angle C$ | 5. نظرية الزاوية الخارجية |
| 6. $m\angle APC = 2m\angle B$ | 6. التعويض (الخطوتان 4، 5) |
| 7. $m\widehat{AC} = m\angle APC$ | 7. تعريف قياس القوس |
| 8. $m\widehat{AC} = 2m\angle B$ | 8. التعويض (الخطوتان 6، 7) |
| 9. $2m\angle B = m\widehat{AC}$ | 9. خاصية التماثل في المعادلة |
| 10. $m\angle B = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$ | 10. خاصية القسمة في المعادلة |

## مثال 1 استخدام الزوايا المحيطية لإيجاد القياس




**جـد قياس كل مما يلي.**

**a.** $m\angle P$

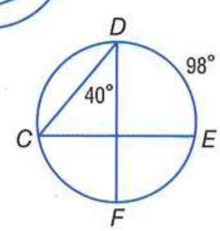
$m\angle P = \frac{1}{2}m\widehat{MN}$

$= \frac{1}{2}(70)$ أو $35$

**b.** $m\widehat{PO}$

$m\widehat{PO} = 2m\angle N$

$= 2(56)$ أو $112$



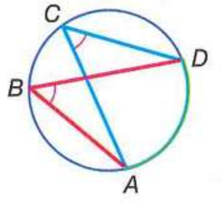

**تمرين موجّه**

**1A.** $m\widehat{CF}$

**1B.** $m\angle C$

الزاويتان المحيطيتان اللتان تحصران قوسًا واحدًا في الدائرة مترابطتان.

## النظرية 6.7



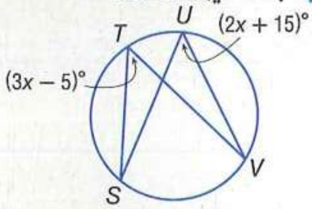

**الشرح** إذا كانت زاويتان محيطيتان في دائرة تحصران القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتان متطابقتان.

**مثال** $\angle B$ و $\angle C$ كلتاهما تحصر القوس $\widehat{AD}$. إذًا، $\angle B \cong \angle C$.

سوف تثبت النظرية 6.7 في التمرين 39.

## مثال 2 استخدام الزوايا المحيطية لإيجاد القياس

**جبريًا** جــد قيمة $m\angle T$.




| | |
|---|---|
| $\angle T$ و $\angle U$ كلتاهما تحصر القوس $\widehat{VS}$ | $\angle T \cong \angle U$ |
| بحسب تعريف الزوايا المتطابقة | $m\angle T = m\angle U$ |
| بالتعويض | $3x - 5 = 2x + 15$ |
| بسّط | $x = 20$ |

إذًا، $m\angle T = 3(20) - 5$ أو 55.

**تمرين موجّه**

**2.** إذا كانت $m\angle S = 3x$ و $m\angle V = (x + 16)$، فجــد قيمة $m\angle S$.

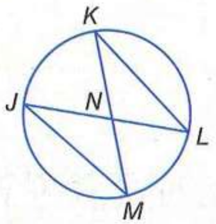
> **نصيحة دراسية**
>
> **المضلعات المحاطة** تذكّر أنه ليكون مضلعٌ محاطًا بدائرة، فإنجميع رؤوسه يجب أن تقع على محيط الدائرة.

## مثال 3 استخدام الزوايا المحيطية في البراهين

**اكتب برهانًا من عمودين.**

**المعطيات:** $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$

**المطلوب إثباته:** $\triangle JMN \cong \triangle KLN$



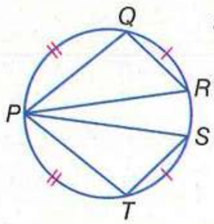

**البرهان:**

| العبارات | المبرّرات |
|---|---|
| .1 $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$ | .1 المعطيات |
| .2 $\overline{JM} \cong \overline{KL}$ | .2 إذا كان قوسان أصغران متطابقين ≅، فإن وتريهما المتناظرين متطابقان ≅. |
| .3 $\angle M$ تحصر $\widehat{JK}$. $\angle L$ تحصر $\widehat{JK}$. | .3 تعريف القوس المحصور |
| .4 $\angle M \cong \angle L$ | .4 الزاويتان المحيطيتان ∡ المقابلتان للقوس نفسه متطابقتان ≅. |
| .5 $\angle JNM \cong \angle KNL$ | .5 الزاويتان المتقابلتان بالرأس ∡ متطابقتان ≅. |
| .6 $\triangle JMN \cong \triangle KLN$ | .6 زاوية-زاوية-ضلع |

**تمرين موجّه**

**3. المعطى:** $\widehat{QR} \cong \widehat{ST},\ \widehat{PQ} \cong \widehat{PT}$

**المطلوب إثباته:** $\triangle PQR \cong \triangle PTS$



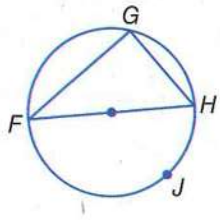

## 2 زوايا المضلعات المحاطة بدوائر

للمثلثات والأشكال الرباعية المحاطة بدائرةٍ مواصفاتٌ خاصة.

### النظرية 6.8

**الشرح** تحصر زاويةٌ محيطيةٌ في مثلث قطرًا أو نصف دائرةٍ إذا وفقط إذا كانت الزاوية زاويةً قائمة.

**مثال** إذا كانت $\widehat{FJH}$ نصف دائرة، فإنّ $m\angle G = 90$. وإذا كانت $m\angle G = 90$، فإنّ $\widehat{FJH}$ نصف دائرة و $\overline{FH}$ قطرٌ في الدائرة.

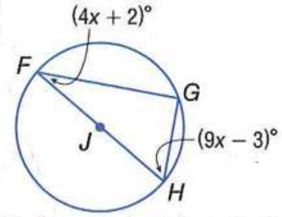



سوف تثبت النظرية 6.8 في التمرين 40.

## مثال 4 إيجاد قياس الزوايا في المثلثات المحاطة بدائرة

**جبريًا جـد قيمة $m\angle F$.**

$\triangle FGH$ مثلث قائم الزاوية لأن الزاوية $\angle G$ ترسم نصف دائرة.




| | |
|---|---|
| $m\angle F + m\angle G + m\angle H = 180$ | نظرية مجموع الزوايا |
| $(4x+2) + 90 + (9x-3) = 180$ | بالتعويض |
| $13x + 89 = 180$ | بسّط |
| $13x = 91$ | بطرح 89 من كل طرف |
| $x = 7$ | بقسمة كل طرف على 13 |

إذًا، $m\angle F = 4(7) + 2$ أو 30.

**تمرين موجّه**

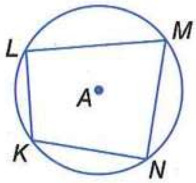
**4.** إذا كانت $m\angle F = 7x + 2$ و $m\angle H = 17x - 8$، فجـد قيمة $x$.

وبينما يمكن إحاطة كثير من الأنواع المختلفة للمثلثات، بما فيها القائمة، بدائرة، فإنه لا يمكن إحاطة سوى أنواع محددة من الأشكال الرباعية في دائرة.

### نظرية 6.9

**الشرح** إذا أحيط متوازي أضلاعٍ بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

**مثال** إذا أحيط الشكل الرباعي $KLMN$ بالدائرة $\odot A$، فإنّ $\angle L$ و $\angle N$ زاويتان متكاملتان و $\angle K$ و $\angle M$ زاويتان متكاملتان.



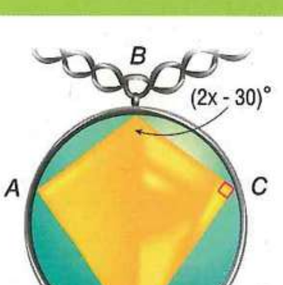

**نصيحة دراسية**

**البراهين** يمكن التحقق من صحة النظرية 6.9 من خلال اعتبار أن الأقواس التي تحصرها الزوايا المتقابلة في شكلٍ رباعي تشكّل دائرة.

سوف تثبت النظرية 6.9 في التمرين 31.

## مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد قياس الزوايا

**المجوهرات تستخدم القلادة الموضحة شكل رباعي محاطًا بدائرة. جـد $m\angle A$ و $m\angle B$.**




بما أن $ABCD$ محاطٌ بدائرة، فكل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

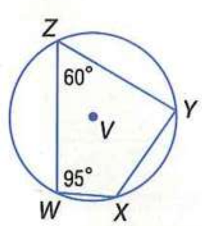
$$m\angle B + m\angle D = 180$$
$$(2x - 30) + x = 180$$
$$3x - 30 = 180$$
$$3x = 210$$
$$x = 70$$

$$m\angle A + m\angle C = 180$$
$$m\angle A + 90 = 180$$
$$m\angle A = 90$$

إذًا، $m\angle A = 90$ و $m\angle B = 2(70) - 30$ أو 110.

**تمرين موجّه**

**5.** الشكل الرباعي WXYZ محاطٌ بالدائرة $\odot V$. جـد $m\angle X$ و $m\angle Y$.




**الربط بالحياة اليومية**

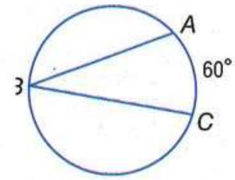
اكتسبت قلائد المجوهرات شهرتها الأولى خلال عصر الفراعنة المصريين. وقد أشاعتها من جديدٍ الملكةُ فكتوريا في أوائل القرن العشرين ولويس فيوتون في عام 2001.

**المصدر:** موقع ماي ماذرز تشارمز

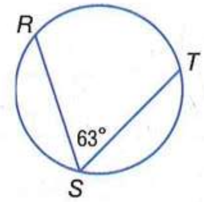
## التحقق من فهمك

**مثال 1** **جـد قياس كل مما يلي.**

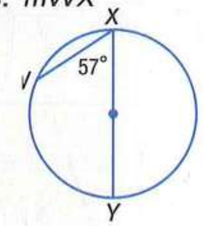
1. $m\angle B$



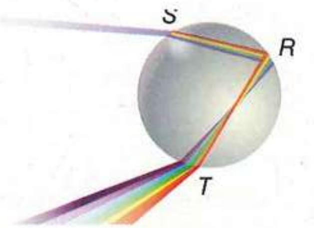

2. $m\widehat{RT}$




3. $m\widehat{WX}$

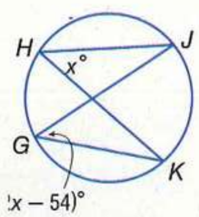



4. **العلوم** يوضح الرسم التخطيطي كيف ينحرف الضوء داخل قطرة مطرٍ لتشكيل ألوان قوس قُزح. إذا كانت $m\widehat{ST} = 144$، فما قياس الزاوية $m\angle R$؟

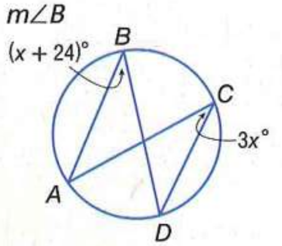



**مثال 2** **جبريًا** **جـد كلاً من القياسات.**

5. $m\angle H$



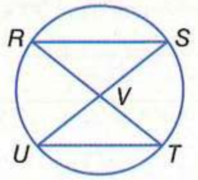

6. $m\angle B$




**مثال 3** 7. **البرهان** اكتب برهانًا مكوّنًا من عمودين.

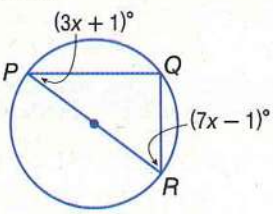
**المعطيات:** $\overline{RT}$ ينصّف $\overline{SU}$ .

**المطلوب إثباته:** $\triangle RVS \cong \triangle UVT$

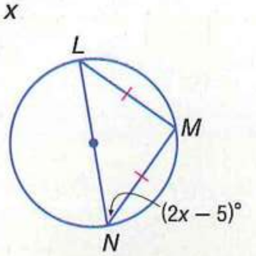



**المثالان 4-5** **البنية** **جـد كل قيمة.**

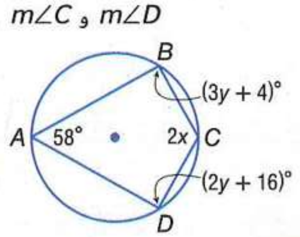
8. $m\angle R$




9. $x$



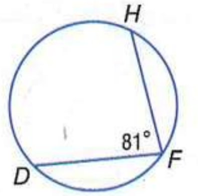

10. $m\angle C$ و $m\angle D$



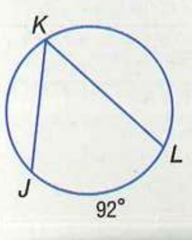

## التمرين وحل المسائل

**مثال 1** **جـد قياس كل مما يلي.**

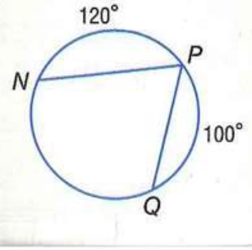
11. $m\widehat{DH}$



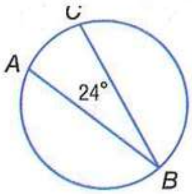

12. $m\angle K$



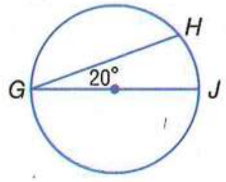

13. $m\angle P$



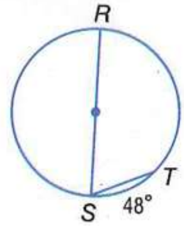
**14.** $m\widehat{AC}$




**15.** $m\widehat{GH}$



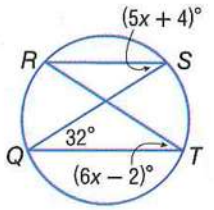

**16.** $m\angle S$




**مثال 2** **جبريًا** جـد كلاً من القياسات.

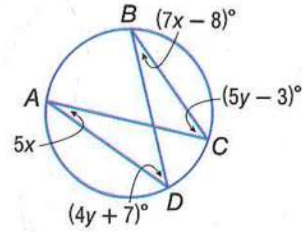
**17.** $m\angle R$

**18.** $m\angle S$




**19.** $m\angle A$

**20.** $m\angle C$

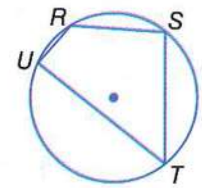



**مثال 3** **البرهان** اكتب النوع المحدّد من البراهين.

**21.** فقرة برهان

**معطى:** $m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$

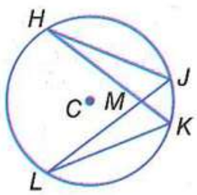
**المطلوب إثباته:** $m\widehat{TUR} = 2m\widehat{URS}$




**22.** برهان مكوّن من عمودين

**معطى:** $\odot C$

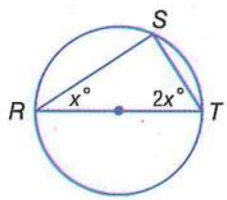
**المطلوب إثباته:** $\triangle KML \sim \triangle JMH$




**مثال 4** **جبريًا** جـد كلاً من القيم.

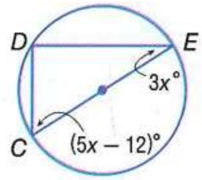
**23.** $x$

**24.** $m\angle T$




**25.** $x$

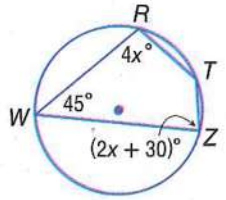
**26.** $m\angle C$




**مثال 5** **البنية** جـد كلاً من القياسات.

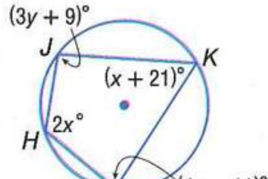
**27.** $m\angle T$

**28.** $m\angle Z$




**29.** $m\angle H$

**30.** $m\angle G$




**31.** **البرهان** اكتب فقرة برهان للنظرية 6.9.

**الإشارات** تُحاط إشارة التوقف التي لها شكل ثماني أضلاعٍ منتظمٍ في دائرة. جـد كلاً من القياسات.


**32.** $m\widehat{NQ}$

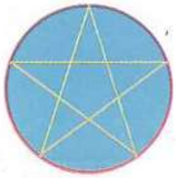
**33.** $m\angle RLQ$

**34.** $m\angle LRQ$

**35.** $m\angle LSR$

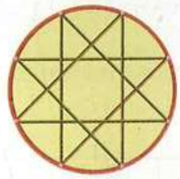
**36. الأعمال الفنية** يوضح الشكل أربعة نقوشٍ فنيةٍ مختلفةٍ لنجوم مصنوعة من الخيوط. فإذا كانت جميع الزوايا المحيطية لكل نجمةٍ متطابقة، جـد قياس كل زاوية محيطية.

a.



b.

c.



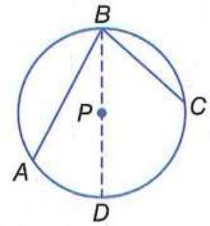
**البرهان اكتب برهانًا مكونًا من عمودين لكل حالةٍ من حالات النظرية 6.6.**

**37. الحالة 2**

**معطى:** $P$ تقع خارج $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر في الدائرة.

**المطلوب إثباته:** $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

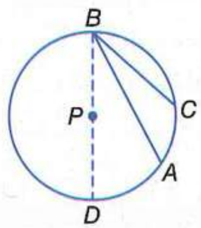



**38. الحالة 3**

**معطى:** $P$ تقع خارج $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطرٌ في الدائرة.

**المطلوب إثباته:** $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$




**البرهان اكتب البرهان المحدد لكل نظرية.**

**39** النظرية 6.7، برهان مكون من عمودين

**40.** النظرية 6.8، فقرة البرهان

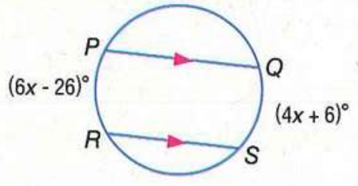
**41. التمثيلات المتعددة** ستدرس في هذه المسألة العلاقة بين أقواس دائرةٍ يقطعها وتران متوازيان.

**a. هندسيًا** استخدم فرجارًا لرسم دائرةٍ تضم وترين متوازيين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ صِل النقطتين A و D عبر رسم القطعة المستقيمة $\overline{AD}$.

**b. سؤال عددي** استخدم منقلةً لإيجاد $m\angle A$ و $m\angle D$. ثم حدّد $m\widehat{AC}$ و $m\widehat{BD}$. ما الذي ينطبق على هذين القوسين؟ اشرح.

**c. سؤال لفظي** ارسم دائرةً أخرى وكرّر الجزأين **a** و **b**. وخمّن أقواس الدائرة التي يقطعها وتران متوازيان.

**d. سؤال تحليلي** استخدم تخمينك لإيجاد $m\widehat{PR}$ و $m\widehat{QS}$ في الشكل المبين على الجهة اليمنى. وتحقق باستخدام زوايا محيطية لإيجاد قياس الأقواس.




## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

**الفرضيات حدد ما إذا كان يمكن أن يحاط كل شكل رباعي مما يلي بدائرةٍ *دائمًا* أو *أحيانًا* أو *ألا يحاط على الإطلاق*. واشرح استنتاجك.**

**42.** المربع **43.** المستطيل **44.** متوازي الأضلاع **45.** المعيّن **46.** الشكل الرباعي المحدب

**47. التحدي** أُحيط مربعٌ بدائرة. فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟

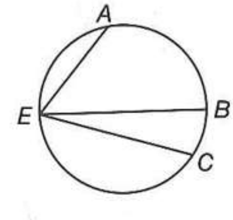
**48. الكتابة في الرياضيات** يحاطُ مثلثٌ قائم الزاوية قياسات زواياه 90°-45°-45° بدائرة. فإذا أعطيت نصف قطر الدائرة، فاشرح كيفية إيجاد طولي قدمي المثلث.

**49. مسألة غير محددة الإجابة** جـد شعارًا في الحياة اليومية وارسمه بحيث يحيط بمضلّع.

**50. الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين الزوايا المحيطية والزوايا المركزية في دائرة. فإذا كانت تقطع القوس نفسه، فما العلاقة بينها؟

## تدريب على الاختبار المعياري

**51.** في الدائرة أدناه، $m\widehat{AC} = 160$ و $m\angle BEC = 38$. فما قياس الزاوية $m\angle AEB$؟




**A** 42 **C** 80

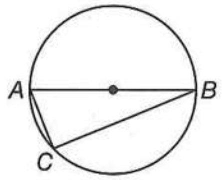
**B** 61 **D** 84

**52. جبريًا** حوّل العلاقة التالية لأبسط صورة $4(3x - 2)(2x + 4) + 3x^2 + 5x - 6$.

**F** $9x^2 + 3x - 14$ **H** $27x^2 + 37x - 38$

**G** $9x^2 + 13x - 14$ **J** $27x^2 + 27x - 26$

**53. إجابة قصيرة** في الدائرة الموضحة أدناه، لديك $\overline{AB}$ قطرٌ في الدائرة، و $AC = 8$ cm، و $BC = 15$ cm
جـد قطر الدائرة ونصف قطرها ومحيطها.




**54. SAT/ACT** مجموع ثلاثة أعداد صحيحة يساوي $-48$. فما هو أصغر الأعداد الصحيحة؟

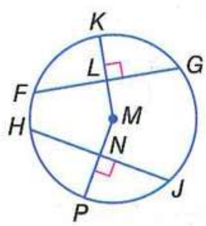
**A** $-15$ **D** $-18$

**B** $-16$ **E** $-19$

**C** $-17$

## مراجعة شاملة

**في الدائرة $\odot M$ لدينا، $FL = 24$ و $HJ = 48$ و $m\widehat{HP} = 65$. جـد كلاً من القياسات.** (الدرس 3-6)




**55.** FG

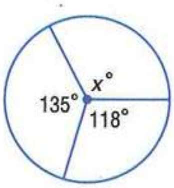
**56.** $m\widehat{PJ}$

**57.** NJ

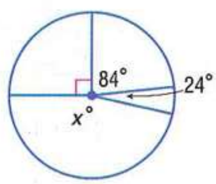
**58.** $m\widehat{HJ}$

**جـد قيمة $x$.** (الدرس 2-6)

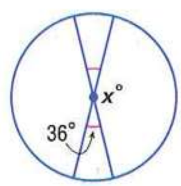
**59.**



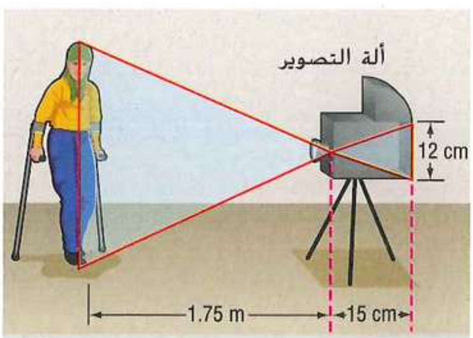

**60.**




**61.**




**62. التصوير الضوئي** في أحد الأنواع الأولى المخترعة لآلات التصوير، كان الضوء يدخل من فتحةٍ في مقدمة آلة التصوير. وكانت الصورة تنعكس بحيث تتوضع رأسًا على عقبٍ في مؤخرة آلة التصوير، بحيث يتشكل مثلثان متشابهان. افترض أن ارتفاع صورة شخصٍ في مؤخرة آلة التصوير يساوي 12 cm، وأن المسافة من الفتحة إلى الشخص الذي يتم تصويره هي 1.75 m، وأن طولة آلة التصوير بحدّ ذاتها 15 cm. فما طول الشخص الذي يجري تصويره؟




## مراجعة المهارات

**جبريًا افترض أن $B$ هي نقطة منتصف $\overline{AC}$. استخدم المعلومات المعطاة لإيجاد القياس المجهول.**

**63.** $AB = 4x - 5, BC = 11 + 2x, AC = ?$

**64.** $AB = 6y - 14, BC = 10 - 2y, AC = ?$

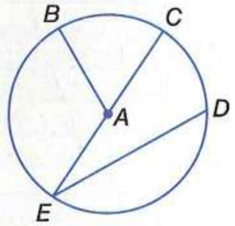
**65.** $BC = 6 - 4m, AC = 8, m = ?$

**66.** $AB = 10s + 2, AC = 40, s = ?$

# 6 اختبار منتصف الوحدة

## الدروس من 6-1 إلى 6-4

**من أجل التمارين 1-3، عد إلى الدائرة $\odot A$.** (الدرس 6-1)




**1.** سَمِّ الدائرة.

**2.** سَمِّ أحد أقطار الدائرة.

**3.** سَمِّ وترًا لا يعدّ قطرًا في الدائرة.

**4. الدراجات** تضم دراجةٌ عجلتين قطر كل منهما 24 cm. (الدرس 6-1)

**a.** جــد محيط كل عجلة.

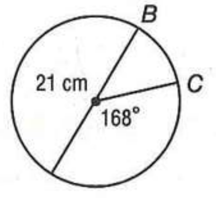
**b.** ما المسافة التي تقطعها العجلة الواحدة بالسنتيمترات بعد 100 دورة؟

**جــد قطر الدائرة ذات المحيط المعطى ونصف قطرها. وقرّب إلى أقرب مئة.** (الدرس 6-1)

**5.** $C = 23$ cm

**6.** $C = 78$ m

**7. الاختيار من متعدد جــد طول $\widehat{BC}$.** (الدرس 6-2)



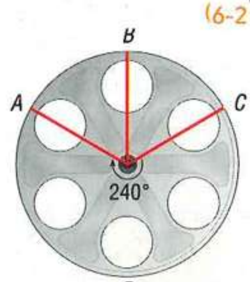

**A** 18°

**B** 2.20 cm

**C** 168°

**D** 30.79 cm

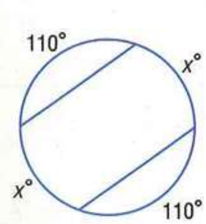
**8. الأفلام** لبكرة الأفلام الموضحة أدناه القطر 14.5 cm. (الدرس 6-2)



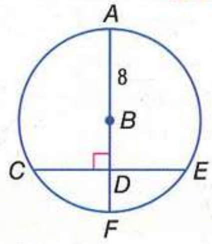

**a.** جــد $m\widehat{ADC}$.

**b.** جــد طول $\widehat{ADC}$.

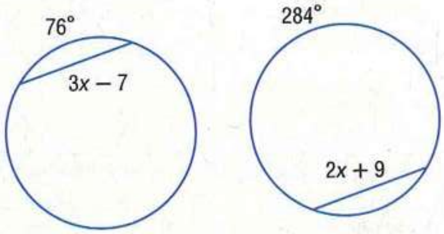
**9.** جــد قيمة $x$. (الدرس 6-3)




**10.** في الدائرة $\odot B$، $CE = 13.5$. جــد $BD$ وقرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 6-3)

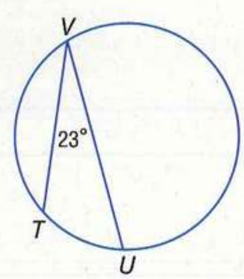



**11.** الدائرتان الموضحتان متطابقتان. جــد قيمة $x$ وطول الوتر. (الدرس 6-3)

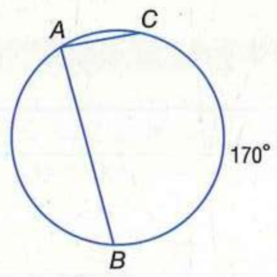



**جــد كلاً من القياسات.** (الدرس 6-4)

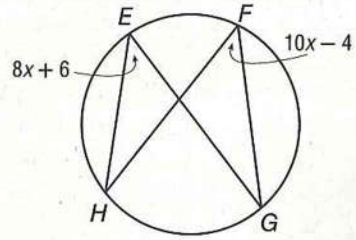
**12.** $m\widehat{TU}$




**13.** $m\angle A$




**14. الاختيار من متعدد** جــد قيمة $x$. (الدرس 6-4)




**F** 1.8

**G** 5

**H** 46

**J** 90

**15.** إذا أحيط مربعٌ طول ضلعه 14 cm بدائرة، فما هو قطر الدائرة؟ (الدرس 6-4)

# الدرس 6-5 المماسات

**.. السابق**

- لقد استخدمتَ نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال الأضلاع في مثلثات قائمة.

**.. الحالي**

1. استخدام خواص المماسات.
2. حلّ مسائل تتضمن مضلعاتٍ محيطةً بدوائر.

**.. لماذا؟**

- كانت الدراجات الأولى تعمل عبر دفع القدمين على الأرض. بينما تستخدم الدراجات الحديثة دواستين وسلسلةً وترسين. تلتف السلسلة حول الترسين الدائريين. ويقاس طول السلسلة بين هذين الترسين بقياس المسافة بين نقطتي تماس السلسلة معهما.

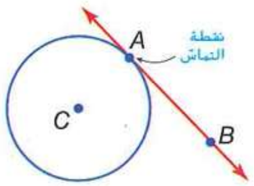
**المفردات الجديدة**

مماس tangent
نقطة التماس point of tangency
مماس مشترك common tangent

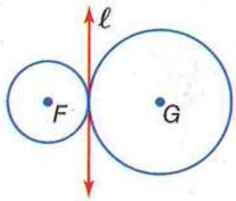
**ممارسات في الرياضيات**

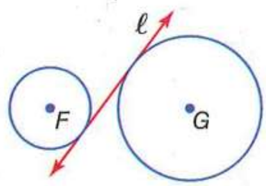
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

**1 المماس** **المماس** هو مستقيمٌ يقع في مستوى الدائرة نفسه ويقطع محيطها في نقطةٍ واحدةٍ فقط تدعى **نقطة التماس**. $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة $\odot C$ عند النقطة $A$. $\overline{AB}$ و $\overrightarrow{AB}$ يدعيان مماسين أيضًا.




**المماس المشترك** هو مستقيمٌ أو شعاعٌ أو قطعةٌ مستقيمةٌ تمسّ دائرتين في المستوى نفسه. وفي كلٍّ من الشكلين أدناه، المستقيم $\ell$ مماس مشتركٌ للدائرتين $F$ و $G$.

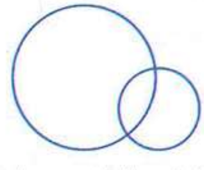


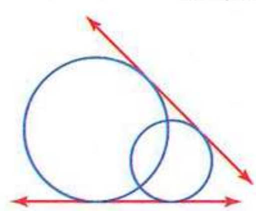

**مثال 1 تحديد المماسات المشتركة**

**انسخ كل شكلٍ من الأشكال وارسم المماسات المشتركة. فإذا لم تكن هناك مماساتٌ مشتركة، فقل *لا مماساتٌ مشتركة*.**

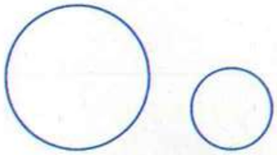
**a.**



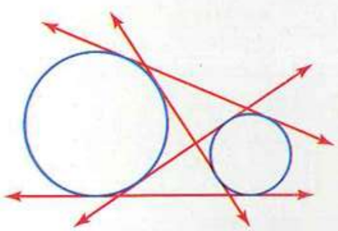
لهاتين الدائرتين مماسان مشتركان.



**b.**

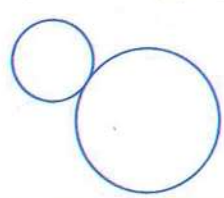


لهاتين الدائرتين 4 مماساتٍ مشتركة.



**تمرين موجّه**

**1A.**

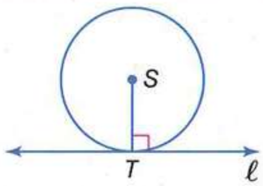


**1B.**

إن المسافة الأقصر من مماسٍ إلى مركز الدائرة هي نصف القطر المرسوم إلى نقطة التماس.

## نظرية 6.10

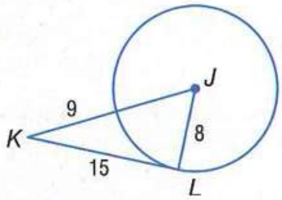
**الشرح** في مستوىً ما، يكون مستقيمٌ مماسًا على دائرةٍ إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.




**مثال** يكون المستقيم $\ell$ مماسًا للدائرة $\odot S$ إذا وفقط إذا كان $\ell \perp \overline{ST}$.

سوف تثبت كلا جزئي النظرية 6.10 في التمرينين 32 و 33.

## مثال 2 تحديد المماس



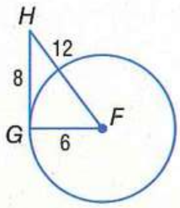

**$\overline{JL}$ نصف قطر في الدائرة $\odot J$. حدّد إذا كان $\overline{KL}$ مماس للدائرة $\odot J$. برّر إجابتك.**

اختبر لتعلم ما إذا كان المثلث $\triangle JKL$ قائم الزاوية.

$8^2 + 15^2 \stackrel{?}{=} (8+9)^2$ نظرية فيثاغورس

$289 = 289$ ✓ بسّط

$\triangle JKL$ مثلثٌ قائم الزاوية زاويته القائمة هي $JLK$. إذًا $\overline{KL}$ عموديٌ على نصف القطر $\overline{JL}$ عند النقطة $L$. ولذلك، بموجب النظرية 6.10، $\overline{KL}$ مماسّ على الدائرة $\odot J$.




### تمرين موجّه

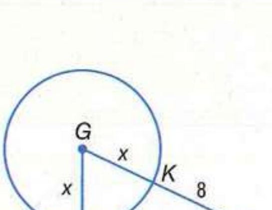
**2.** حدّد إذا كان $\overline{GH}$ مماسًا للدائرة $\odot F$. وبرّر إجابتك.

يمكنك استخدام النظرية 6.10 أيضًا لتحديد القيم الناقصة.

## مثال 3 استخدام المماس لإيجاد قياساتٍ مجهولة

**$\overline{JH}$ مماس على الدائرة $\odot G$ عند النقطة $J$. جــد قيمة $x$.**

بموجب النظرية 6.10، فإن $\overline{JH} \perp \overline{GJ}$. إذًا، فالمثلث $\triangle GHJ$ قائم الزاوية.




$GJ^2 + JH^2 = GH^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 12^2 = (x+8)^2$ $GJ = x$ و $JH = 12$ و $GH = x + 8$

$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$ بالضرب

$80 = 16x$ بالتبسيط

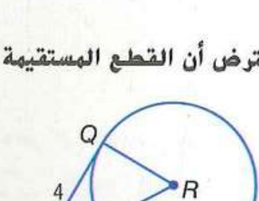
$5 = x$ بقسمة كل طرف على 16.

### تمرين موجّه

**جــد قيمة $x$. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.**

**3A.**


**3B.**



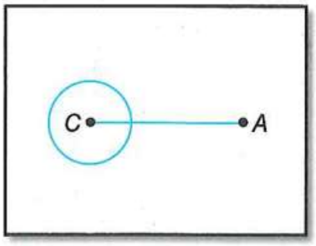

### نصيحة في حل المسائل

**الاستنتاج المنطقي** يمكنك استخدام إستراتيجية حل *المسائل الأبسط* عبر رسم المثلثات القائمة وتسميتها بدون الدوائر. ويوضح الشكل أدناه رسمًا للمثلث الوارد ذكره في المثال 3.

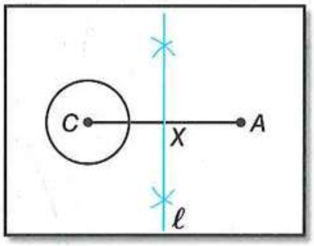
يمكنك استخدام النظريتين 6.8 و 6.10 لإنشاء مستقيمٍ مماسٍ على دائرة.

## الإنشاء المستقيم المماس على دائرة في نقطة خارجية

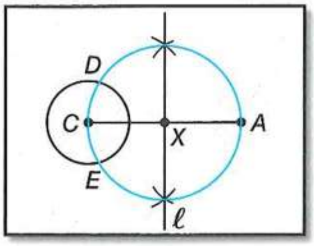
**الخطوة 1** استخدم فرجارًا لرسم دائرة $C$ ونقطة $A$ خارج الدائرة $C$. ثم ارسم $\overline{CA}$.



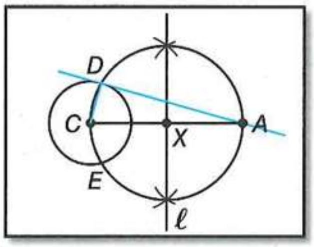

**الخطوة 2** أنشئ المستقيم $\ell$، وهو المنصف العمودي لـ $\overline{CA}$. سَمِّ نقطة التقاطع $X$.




**الخطوة 3** أنشئ دائرةً $X$ نصف قطرها $\overline{XC}$. سَمِّ نقطتي تقاطع الدائرتين $D$ و $E$.




**الخطوة 4** ارسم $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overline{DC}$. المثلث $\triangle ADC$ محاطٌ بنصف دائرة. إذًا، الزاوية $\angle ADC$ زاوية قائمة و $\overleftrightarrow{AD}$ مماس على الدائرة $\odot C$.



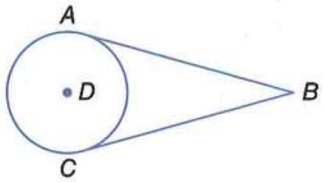

سوف تبرر هذا الإنشاء في التمرين 36 وستنشئ مستقيمًا مماسًا على دائرةٍ في نقطةٍ على محيطها في التمرين 34.

يمكن أن يكون هناك أكثر من مستقيمٍ مماسٍ على الدائرة نفسها.

## نظرية 6.11

**الشرح** إذا كانت قطعتان مستقيمتان مرسومتان من نقطةٍ واحدةٍ خارج الدائرة مماسيتين على تلك الدائرة، فهما متطابقتان.

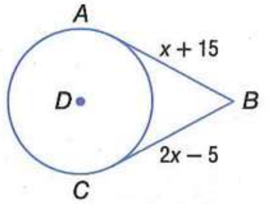
**مثال** إذا كانت القطعتان المستقيمتان $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ مماسيتين على الدائرة $\odot D$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.




سوف تثبت النظرية 6.11 في التمرين 28 .

## مثال 4 استخدام المماسات المتطابقة لإيجاد القياس

**الجبر** $\overline{AB}$ و $\overline{CB}$ مماسان للدائرة $\odot D$. جـد قيمة $x$.




$AB = CB$ المماسان المرسومان من نقطة خارجية واحدة متطابقان.

$x + 15 = 2x - 5$ بالتعويض

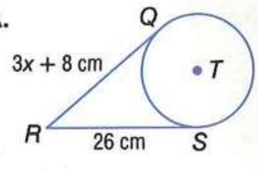
$15 = x - 5$ بطرح $x$ من كل طرف

$20 = x$ بجمع 5 إلى كل طرف

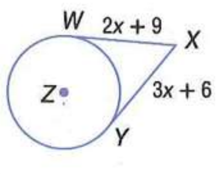
### تمرين موجّه

**الجبر** جـد قيمة $x$. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

**4A.**

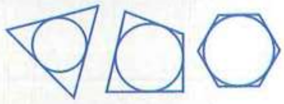
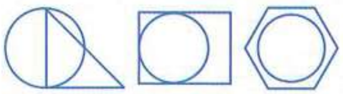



**4B.**



## 2 المضلعات المحيطة لدوائر

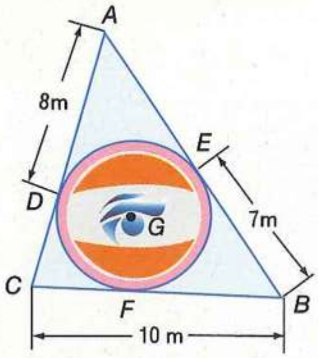
**المضلعات المحيطة لدوائر** يكون المضلع محيطًا لدائرةٍ إذا كان كل ضلعٍ من أضلاع المضلّع مماسًا للدائرة.

| المضلعات المحيطة لدائرة | المضلعات غير المحيطة لدائرة |
|---|---|
|  |  |

**انتبه!**
**تحديد المضلعات المحيطة بدوائر** إن كون دائرةٍ مماسيةً على ضلعٍ أو أكثر في مضلع لا يعني كون المضلع محيطًا بالدائرة، وذلك كما هو موضحٌ في المجموعة الثانية من الأشكال.

يمكنك استخدام النظرية 6.11 لإيجاد القياس المجهول في المضلعات المحيطة لدوائر.

### مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد القياس في مضلعات محيطة بدائرة




**تصميم الرسوميات** **يعطي مصمم رسومياتٍ توجيهاتٍ لتشكيل نسخةٍ مكبرةٍ عن الشعار المستطيل الموضح. فإذا كان المثلث $\triangle ABC$ محيطًا بالدائرة $\odot G$، جـد محيط المثلث $\triangle ABC$.**

**الخطوة 1** جـد القياس المجهول.

بما أن المثلث $\triangle ABC$ محيطٌ بالدائرة $\odot G$، فإن $\overline{AE}$ و $\overline{AD}$ مماسان للدائرة $\odot G$، شأنهما شأن $\overline{BE}$ و $\overline{BF}$ و $\overline{CF}$ و $\overline{CD}$ ولذلك، $\overline{AE} \cong \overline{AD}$، و $\overline{BF} \cong \overline{BE}$، و $\overline{CF} \cong \overline{CD}$.

إذًا، $AE = AD = 8$ m، $EB = FB = 7$ m.

بموجب جمع القطع المستقيمة، فإن $CF + FB = CB$ . إذًا $CF = CB - FB = 10 - 7$ أو 3 m. إذًا، $CD = CF = 3$ m.

**الخطوة 2** جـد محيط المثلث $\triangle ABC$.

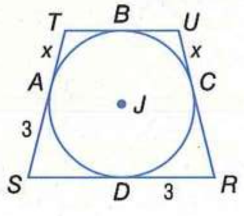
المحيط $= AE + EB + BC + CD + DA$

$= 8 + 7 + 10 + 3 + 8$ أو 36

إذًا، محيط المثلث $\triangle ABC$ يساوي 36 m .

**تمرين موجّه**

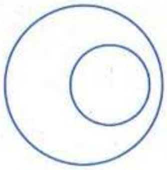
**5.** يُرسم الشكل الرباعي $RSTU$ حول الدائرة $\odot J$.
فإذا كان المحيط يساوي 18 وحدة، جـد قيمة $x$.




## التحقق من فهمك

**مثال 1**

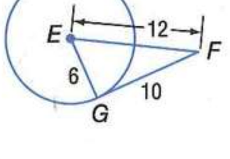
**1.** انسخ الشكل الموضح، وارسم المماسات المشتركة. فإن لم تكن هناك مماساتٌ مشتركة، فقل لا مماسات مشتركة.



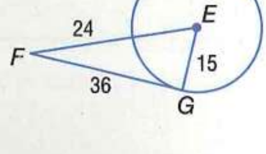
**مثال 2**

**حدّد ما إذا كان $\overline{FG}$ مماسًا للدائرة $\odot E$. برّر إجابتك.**

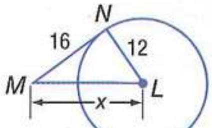
**2.**

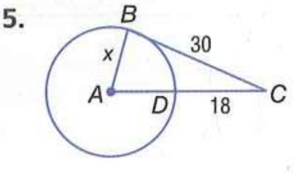


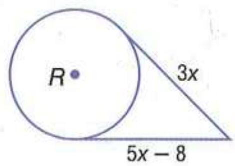

**3**



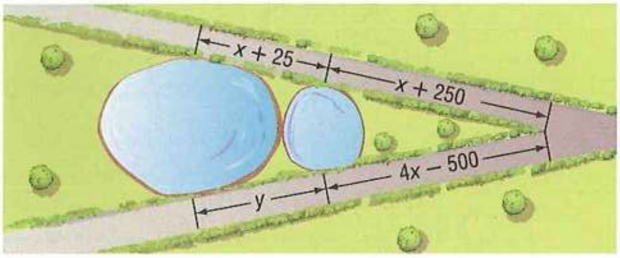
**المثالان 3 و 4** **جـد قيمة $x$. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.**

4.



5.



6.


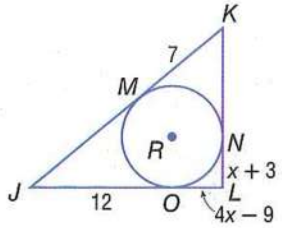

**7.** **مهندس المناظر الطبيعية** يرصِف مهندس مناظرٍ طبيعيةٍ ممشيين مماسيين على البركتين شبه الدائريتين الموضحتين. الأطوال معطاةٌ بالأمتار. جـد قيمتيّ **x** و **y**.




**مثال 5** **8.** **الاستنتاج المنطقي** المثلث $JKL$ محيطٌ للدائرة $\odot R$.

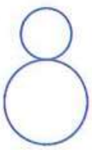
**a.** جـد قيمة $x$.

**b.** جـد محيط المثلث $\triangle JKL$.

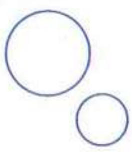


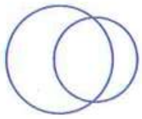

## التمرين وحل المسائل

**مثال 1** **انسخ كل شكل من الأشكال وارسم المماسات المشتركة. فإذا لم تكن هناك مماساتٌ مشتركة، فقل *لا مماسات مشتركة*.**

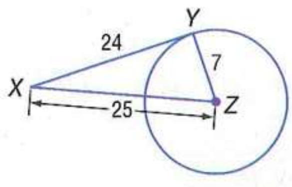
9.


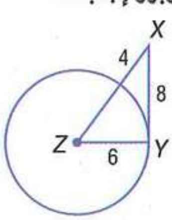
10.

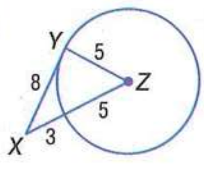

11.


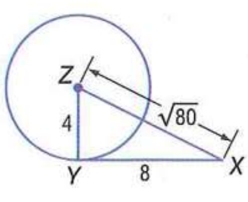
12.


**مثال 2** **حدد ما إذا كان $\overline{XY}$ مماسًا للدائرة المعطاة. وبرر إجابتك.**

13.


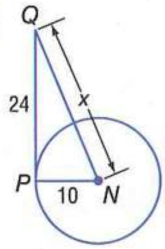

14.



15.


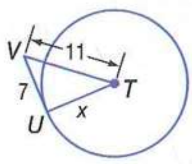

16.


**المثالان 3 و 4** **جـد قيمة $x$. وافترض أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسيّة مماسية بالفعل. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة عند الضرورة.**

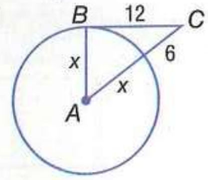
**17.**



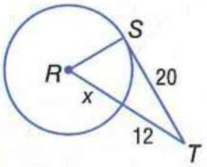

**18.**



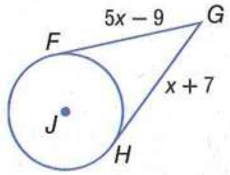

**19.**



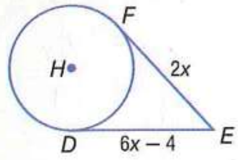

**20.**

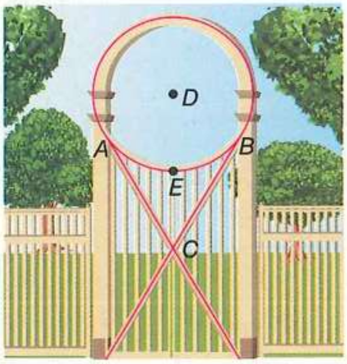



**21.**




**22.**



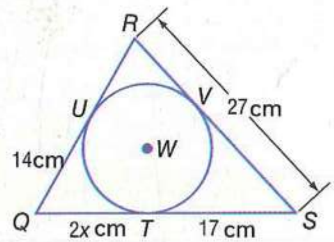




**23. العرائش** في العريشة الدائرية الموضحة، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ مماسيتان للدائرة $\odot D$. طول نصف قطر الدائرة يساوي 26 cm و $EC = 20$ cm. جـد كلاً من القياسات مقربًا إلى أقرب جزءٍ من مئة.

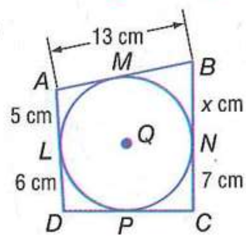
a. $AC$ b. $BC$

**مثال 5** **الاستنتاج المنطقي** **جـد قيمة $x$. ثم جـد المحيط.**

**24.**

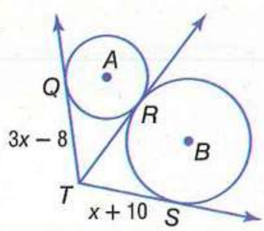



**25.**

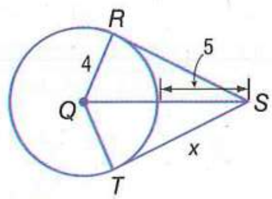



**جـد قيمة $x$ مقربةً إلى أقرب جزءٍ من مئة. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.**

**26.**




**27.**

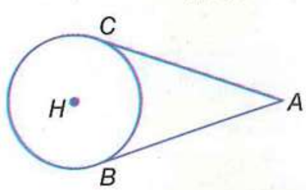



**اكتب النوع المحدّد من البراهين.**

**28.** البرهان المكوّن من عمودين للنظرية 6.11

**المعطيات:** $\overline{AC}$ مماسّ للدائرة $\odot H$ عند $C$.
$\overline{AB}$ مماس للدائرة $\odot H$ عند $B$.

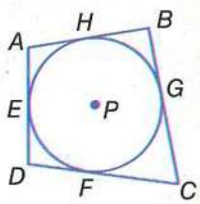
**المطلوب إثباته:** $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

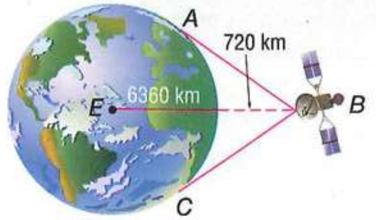



**29.** البرهان المكوّن من عمودين

**المعطى:** شكل رباعي $ABCD$ محيطٌ للدائرة $\odot P$.

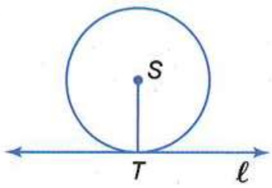
**المطلوب إثباته:** $AB + CD = AD + BC$






**30. الأقمار الصناعية** يرتفع قمر صناعي مسافة 720 km فوق سطح الأرض، التي نصف قطرها يساوي 6360 km. وتقع المنطقة المرئية من القمر الصناعي على سطح الأرض بين خطي المماس $\overline{BA}$ و $\overline{BC}$. ما طول $\overline{BA}$؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

**31. الحطام الفضائي** يشير مصطلح *الحطام* المداري إلى المواد التي تخلّفها الرحلات الفضائية والتي لا تزال تدور حول الكرة الأرضية. في عام 2007، طرحت مركبةٌ فضائيةٌ أسطوانةً من الأمونيا وزنها 635 kg. افترض أن ارتفاع الإسطوانة 435 km. فما هي المسافة من الإسطوانة إلى أبعد نقطةٍ على سطح الأرض يمكن رؤية الإسطوانة منها؟ افترض أن نصف قطر الأرض يساوي 6360 km. قرّب إلى أقرب كيلومترٍ واشتمل على رسمٍ تخطيطي لهذه الحالة ضمن حلّك.

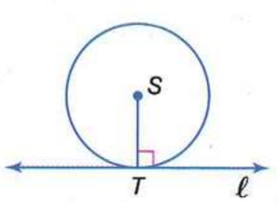



**32. البرهان** اكتب برهانًا غير مباشرٍ لتبيّن أنه إذا كان مستقيمٌ مماسًا لدائرة، إذًا فهو عموديٌّ على نصف قطر الدائرة. (الجزء 1 من النظرية 6.10)

**المعطيات:** $\ell$ مماس للدائرة $\odot S$ عند $T$؛ $\overline{ST}$ هو نصف قطر الدائرة $\odot S$.

**المطلوب برهانه:** $\ell \perp \overline{ST}$

(تلميح: افترض أن $\ell$ ليس عموديًا $\perp$ على $\overline{ST}$.)




**33. البرهان** اكتب برهانًا غير مباشرٍ تبيّن فيه أنه إذا كان مستقيمٌ عموديًا على نصف قطر دائرةٍ عند نقطته الطرفية، إذًا فالمستقيم مماسٌ للدائرة. (الجزء 2 من النظرية 6.10)

**المعطيات:** $\ell \perp \overline{ST}$؛ $\overline{ST}$ نصف قطر للدائرة $\odot S$.

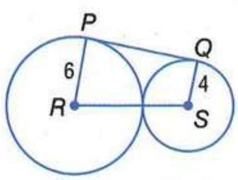
**المطلوب برهانه:** $\ell$ مماس للدائرة $\odot S$.

(تلميح: افترض أن $\ell$ ليسمماسًا على الدائرة $\odot S$.)

**34. الأدوات** أنشئ خط مماسٍ على دائرةٍ في نقطةٍ على محيطها.

استخدم فرجارًا لرسم الدائرة $\odot A$. اختر نقطةً $P$ على محيط الدائرة وارسم $\overleftrightarrow{AP}$ ثم أنشئ قطعةً مستقيمةً مارةً بالنقطة $P$ وعموديةً على $\overleftrightarrow{AP}$. سَمِّ خطّ المماس $t$. واشرح كل خطوةٍ وبرّرها.

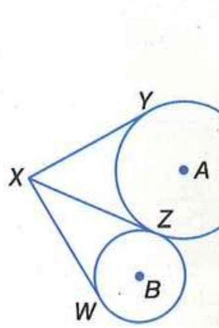
## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا




**35. التحدي** $\overline{PQ}$ مماسّ للدائرة $R$ و $S$. جــد طول $PQ$. واشرح استنتاجك.

**36. مسألة غير محددة الإجابة** ارسم مثلثًا محيطًا ومثلثًا محاطًا.

**37. التبرير** في الشكل، $\overline{XY}$ و $\overline{XZ}$ مماسان للدائرة $\odot A$. $\overline{XZ}$ و $\overline{XW}$ مماسان للدائرة $\odot B$. اشرح كيف يمكن أن تكون القطع المستقيمة $\overline{XY}$ و $\overline{XZ}$ و $\overline{XW}$ جميعها متطابقة إذا كان للدوائر أنصاف أقطار مختلفة.




**38. الكتابة في الرياضيات** هل يمكن رسم مماسٍ من نقطةٍ تقع في أي مكانٍ خارج الدائرة أو على محيطها أو بداخلها؟ اشرح.

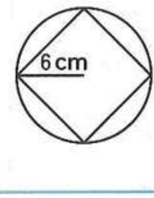
## تدريب على الاختبار المعياري

**39.** نصف قطر الدائرة $\odot P$ يساوي 10 cm، و $\overline{ED}$ مماسّ على الدائرة عند النقطة $D$. $F$ تقع على الدائرة $\odot P$ والقطعة المستقيمة $\overline{EP}$ في الوقت نفسه. فإذا كان طول $ED = 24$ cm، فما طول $\overline{EF}$؟

**A** 10 *cm* **C** 21.8 *cm*

**B** 16 *cm* **D** 26 *cm*

**40. الإجابة القصيرة** يُحاط مربعٌ في دائرةٍ نصف قطرها 6 cm. جد طول كل ضلعٍ في المربع.

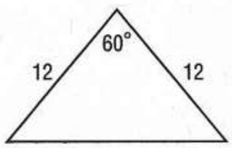



**41. جبريًا** أيّ مما يلي يوضح التحليل الكامل للعلاقة $25x^2 - 5x$ إلى عواملها الأولية؟

**F** $5x(x)$ **H** $x(x - 5)$

**G** $5x(5x - 1)$ **J** $x(5x - 1)$

**42. SAT/ACT** ما هو محيط المثلث المعروض أدناه؟




**A** 12 وحدة **D** 36 وحدة

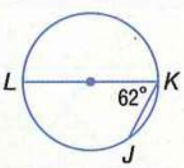
**B** 24 وحدة **E** 104 وحدات

**C** 34.4 وحدة

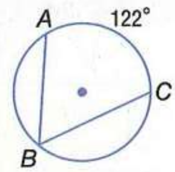
## مراجعة شاملة

**إيجاد كل قياس.** (الدرس 6-4)

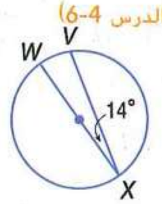
**43.** $m\widehat{JK}$



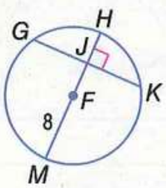

**44.** $m\angle B$



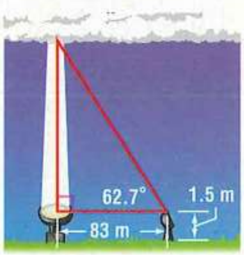

**45.** $m\widehat{VX}$




**في الدائرة $\odot F$، $GK = 14$ و $m\widehat{GHK} = 142$. جد كلاً من القياسات. وقرّب إلى أقرب مئة.** (الدرس 6-3)



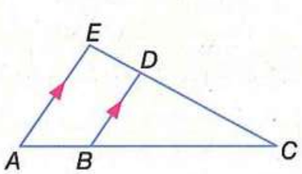

**46.** $m\widehat{GH}$ **47.** $JK$ **48.** $m\widehat{KM}$



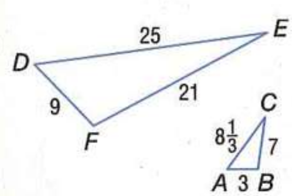

**49. الأرصاد الجوية** يدعى ارتفاع قاعدة كتلةٍ من السحبِ *بالسقف*. وجّه خبيرٌ للأرصاد الجوية في إحدى الليالي ضوءًا كشافًا باتجاه رأسيٍ على السُّحب كي يرصد السقف. وباستخدام جهازٍ لقياس الزوايا، وهو جهازٌ ضوئيٌ مزودٌ بتلسكوب دوار، يبعد مسافة 83 m عن الضوء الكشاف ويرتفع 1.5 m فوق سطح الأرض، توصل إلى أن زاوية الارتفاع تساوي 62.7°. فكم كان ارتفاع السقف؟

**حدّد إذا كان المثلثان متشابهين. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة تشابه. واشرح استنتاجك.**

**50.**




**51.**




## مراجعة المهارات

**حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

**52.** $15 = \frac{1}{2}[(360 - x) - 2x]$ **53.** $x + 12 = \frac{1}{2}[(180 - 120)]$ **54.** $x = \frac{1}{2}[(180 - 64)]$

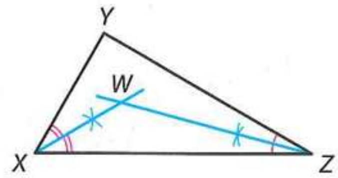
التوسع 6-5

# مختبر الهندسة
# الدوائر المحيطة والمحاطة

في هذا المختبر، ستقوم بإجراء إنشاءاتٍ تتضمن دائرةً محيطيةً أو محاطة.

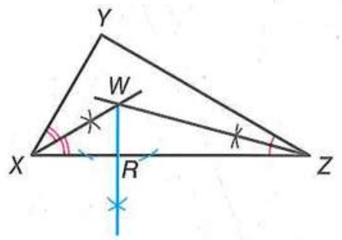
## النشاط 1 إنشاء دائرةً محاطةً بمثلث

**الخطوة 1**



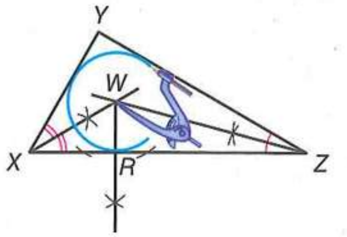

ارسم مثلثًا XYZ وأنشئ منصفي زاويتين في المثلث لتحديد نقطة تلاقي المنصفات W.

**الخطوة 2**




أنشئ قطعةً مستقيمةً عموديةً على أحد الأضلاع تمرّ من خلال نقطة تلاقي المنصفات. وسَمِّ نقطة التقاطع R.

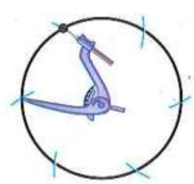
**الخطوة 3**




افتح الفرجار بمقدار طول $\overline{WR}$. ضع رأس الفرجار على النقطة $W$ وارسم دائرةً نصف قطرها يساوي ذلك الطول.

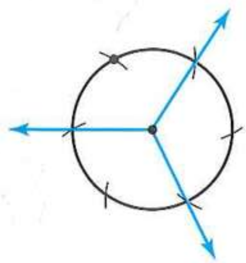
## النشاط 2 إنشاء مثلث يحيط بدائرة

**الخطوة 1**



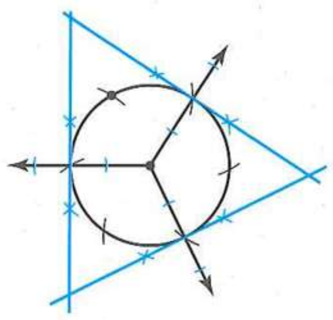
أنشئ دائرةً وارسم نقطة على محيطها. استخدم فتحة الفرجار التي استخدمتها لإنشاء الدائرة لإنشاء قوسٍ على محيط الدائرة من تلك النقطة. استمر كما هو موضح.

**الخطوة 2**



ارسم أشعةً من المركز وتمر بالأقواس المنشأة على المحيط بالتناوب.

**الخطوة 3**



أنشئ مستقيمًا عموديًا على كل شعاع.

## التمثيل بالنماذج

**1.** ارسم مثلثًا قائمًا وأحِط دائرةً به.

**2.** أحِط سداسي أضلاع منتظم بدائرة. ثم أحِط مثلثًا متساوي الأضلاع في دائرة. (تلميح: الخطوة الأولى في كل عميلة إنشاء تطابق الخطوة 1 في النشاط 2.)

**3.** أحِط مربعًا بدائرة. ثم أحِط دائرةً بمربع.

**4.** **التحدّي** أحِط دائرةً بسداسي أضلاعٍ منتظم.

# 6-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا

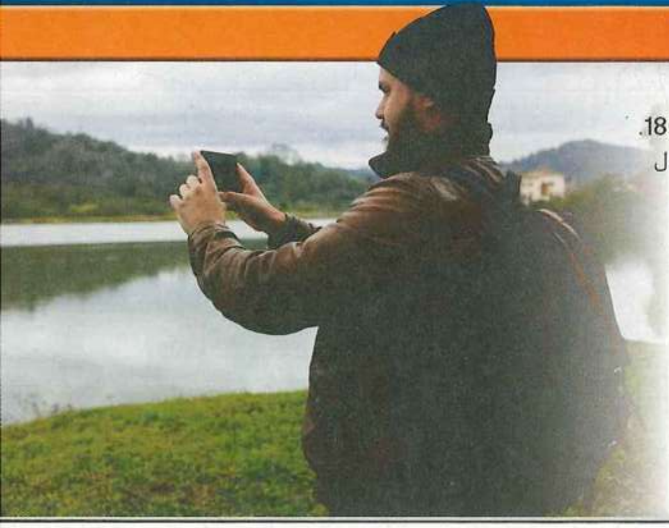
**.. السابق**

- أوجدت قياسات قطعٍ تشكلها مماسات على دائرة.

**.. الحالي**

1. إيجاد قياسات الزوايا التي تشكلها مستقيمات تتقاطع على محيط دائرة أو بداخلها.
2. إيجاد قياسات الزوايا التي تشكلها مستقيماتٌ تقاطع خارج الدائرة.

**.. لماذا؟**



- مجال رؤية الإنسان الطبيعي يساوي حوالي °180. ولمعظم آلات التصوير مجال رؤيةٍ أضيق بكثيرٍ يقع بين °20 و °50. وتحدّد زاوية الرؤية هذه جزء الجسم المنحني الذي يمكن أن تلتقطه آلة التصوير على فلمها.

**المفردات الجديدة**

القاطع secant

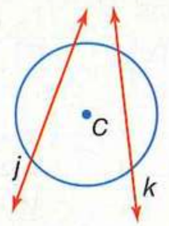
**ممارسات في الرياضيات**

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

## 1 نقاط التقاطع على محيط دائرةٍ أو داخلها

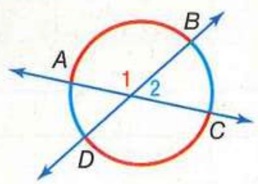
**القاطع** هو مستقيمٌ يقطع دائرةً في نقطتين بالتحديد. المستقيمان $j$ و $k$ قاطعان للدائرة $\odot C$.




عندما يتقاطع قاطعان داخل دائرة، فالزوايا المتشكلة تتعلق بالأقواس التي يقطعانها.

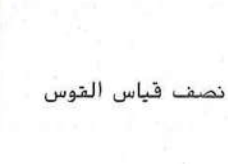
### النظرية 6.12

**الشرح** إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتشكلة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين اللذين تحصرهما الزاوية والزاوية المقابلة لها بالرأس.




**مثال** $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{DA} + m\widehat{BC})$

### البرهان




**المعطيات:** $\overleftrightarrow{HK}$ و $\overleftrightarrow{JL}$ يتقاطعان عند $M$.

**المطلوب إثباته:** $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{JH} + m\widehat{LK})$

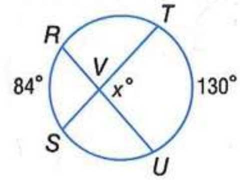
**البرهان:**

| العبارات | المبرّرات |
|---|---|
| 1. $\overleftrightarrow{HK}$ و $\overleftrightarrow{JL}$ يتقاطعان عند $M$. | 1. المعطيات |
| 2. $m\angle 1 = m\angle MJK + m\angle MKJ$ | 2. نظرية الزاوية الخارجية |
| 3. $m\angle MJK = \frac{1}{2}m\widehat{LK}$, $m\angle MKJ = \frac{1}{2}m\widehat{JH}$ | 3. قياس الزاوية المحيطية ∠ نصف قياس القوس المحصور. |
| 4. $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{LK} + \frac{1}{2}m\widehat{JH}$ | 4. التعويض |
| 5. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{JH} + m\widehat{LK})$ | 5. خاصية التوزيع |

## مثال 1 استخدام الأوتار أو القواطع المتقاطعة

جــد قيمة $x$.

**.a**

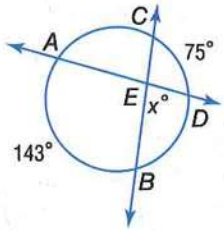



$m\angle TVU = \frac{1}{2}(m\widehat{RS} + m\widehat{TU})$ النظرية 6.12

$x = \frac{1}{2}(84 + 130)$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(214)$ أو 107 بسّط

**.b**




**الخطوة 1** جــد قياس $m\angle AEB$.

$m\angle AEB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$ النظرية 6.12

$= \frac{1}{2}(143 + 75)$ بالتعويض

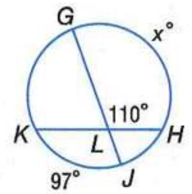
$= \frac{1}{2}(218)$ أو 109 بسّط

**الخطوة 2** جــد قيمة $x$، قياس الزاوية $\angle DEB$.

$\angle AEB$ و $\angle DEB$ زاويتان متكاملتان.

إذًا، $x = 180 - 109$ أو 71.

**.c**




$m\angle GLH = \frac{1}{2}(m\widehat{GH} + m\widehat{KJ})$ النظرية 6.12

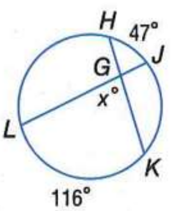
$110 = \frac{1}{2}(x + 97)$ بالتعويض

$220 = (x + 97)$ بضرب كل طرف بــ 2

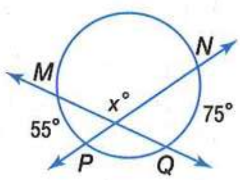
$123 = x$ بطرح 97 من كل طرف

### تمرين موجّه

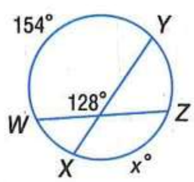
**1A.**




**1B.**




**1C.**



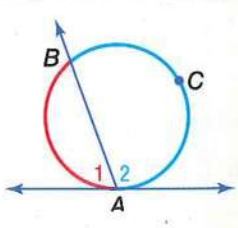

> **نصيحة دراسية**
>
> **طريقة بديلة**
>
> في المثال 1b، يمكن إيجاد قياس الزاوية $m\angle DEB$ أيضًا عبر البدء بإيجاد مجموع قياسي $\widehat{AC}$ و $\widehat{BD}$.
>
> $m\widehat{AC} + m\widehat{BD}$
>
> $= 360 - (m\widehat{AC} + m\widehat{CD})$
>
> $= 360 - (143 + 75)$
>
> $= 142$
>
> $m\angle DEB$
>
> $= \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BD})$
>
> $= \frac{1}{2}(142) = 71$

تذكّر أن النظرية 6.6 تنصّ على أن قياس زاويةٍ محيطيةٍ يساوي نصف قياس القوس المحصور. فإذا كان أحد ضلعي هذه الزاوية مماسًا للدائرة، فإن هذه العلاقة تبقى صحيحةً أيضًا.

### النظرية 6.13

**الشرح** إذا تقاطع قاطعٌ ومستقيمٌ عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متشكلة يساوي نصف قياس القوس المحصور.

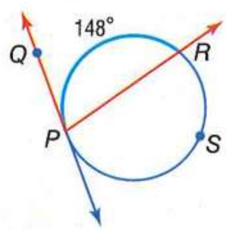
**مثال** $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{AB}$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{ACB}$




سوف تثبت النظرية 6.13 في التمرين 331.

## مثال 2 استخدام القواطع والمماسات المتقاطعة

**جـد قياس كل مما يلي.**

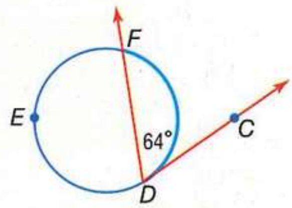



**a.** قياس $\angle QPR$

$$m\angle QPR = \frac{1}{2} m\widehat{PR} \qquad \text{6.13 نظرية}$$

$$= \frac{1}{2}(148) = 74 \qquad \text{بالتعويض والتبسيط}$$

**b.** $m\widehat{DEF}$




$$m\angle CDF = \frac{1}{2} m\widehat{FD} \qquad \text{6.13 نظرية}$$

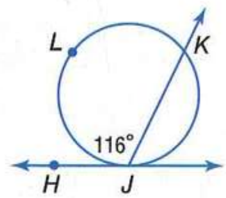
$$64 = \frac{1}{2} m\widehat{FD} \qquad \text{بالتعويض}$$

$$128 = m\widehat{FD} \qquad \text{اضرب كل طرف بـ 2}$$

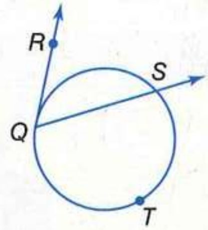
$$m\widehat{DEF} = 360 - m\widehat{FD} = 360 - 128 = 232$$

### تمرين موجّه

**2A.** جـد قياس $m\widehat{JLK}$.




**2B.** جـد قياس $m\angle RQS$ إذا كان $m\widehat{QTS} = 238$.



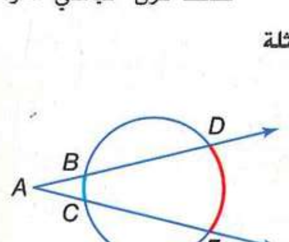

## 2 نقاط التقاطع خارج الدائرة

**نقاط التقاطع خارج الدائرة** يمكن أن تلتقي القواطع والمماسات أيضًا خارج الدائرة. وقياس الزاوية المتشكلة أيضًا يساوي نصف قياس الأقواس التي تقطعها.

### النظرية 6.14

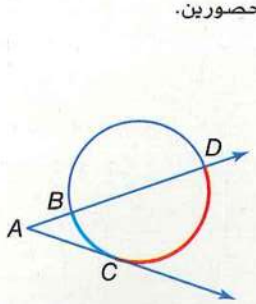
**الشرح** إذا تقاطع قاطعان، أو قاطعٌ ومماس، أو مماسان خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتشكّلة يساوي نصف فرق قياسي القوسين المحصورين.

**أمثلة**



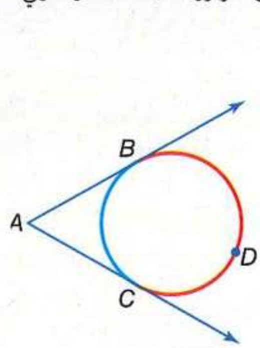

**قاطعان**

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$




**قاطع-مماس**

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} - m\widehat{BC})$




**مماسان**

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{BDC} - m\widehat{BC})$

سوف تثبت النظرية 6.14 في التمارين 30-32.

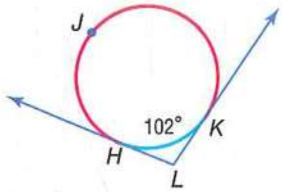
**نصيحة دراسية**

**القيمة المطلقة** يمكن التعبير عن قياس كل زاوية $\angle A$ أيضًا على أنه نصف القيمة المطلقة لفرق قياسات الأقواس. وبهذه الطريقة، لا يؤثر ترتيب القياسات في نتيجة الحساب.

## مثال 3 استخدام الزوايا والقواطع التي تتقاطع خارج دائرة

**جـد قياس كل مما يلي.**

**a.** قياس $m\angle L$

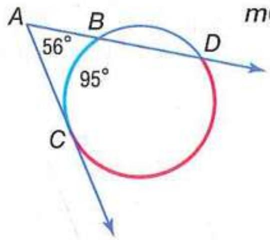



$m\angle L = \frac{1}{2}(m\widehat{HJK} - m\widehat{HK})$ نظرية 6.14

$= \frac{1}{2}(360 - 102) - 102$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(258 - 102) = 78$ بسّط

**b.** $m\widehat{CD}$




$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - m\widehat{BC})$ نظرية 6.14

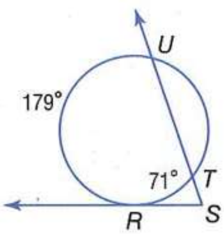
$56 = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - 95)$ بالتعويض

$112 = m\widehat{CD} - 95$ بضرب كل طرف بـ 2

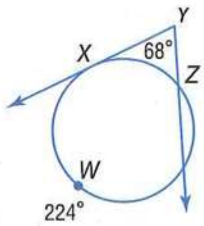
$207 = m\widehat{CD}$ بإضافة 95 إلى كل طرف

### تمرين موجّه

**3A.** $m\angle S$



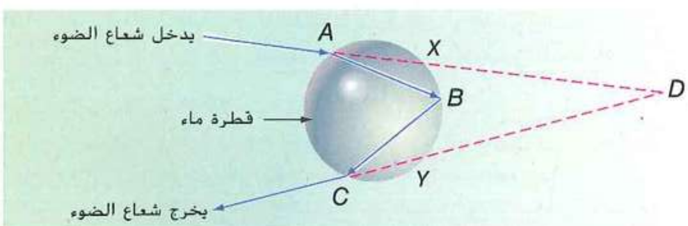

**3B.** $m\widehat{XZ}$




يمكنك تطبيق خواصّ القواطع المتقاطعة لحل مسائل من الحياة اليومية.

## مثال 4 من الحياة اليومية تطبيق خواصّ القواطع المتقاطعة

**العلوم** يوضح الرسم التخطيطي مسار شعاع ضوئي عندما يصطدم بقطرة ماء. ينحرف الشعاع أو ينكسر عند النقاط $A$ و $B$ و $C$. إذا كان قياس الزاوية $m\widehat{AC} = 128$ و $m\widehat{XBY} = 84$، فما قياس الزاوية $m\angle D$؟



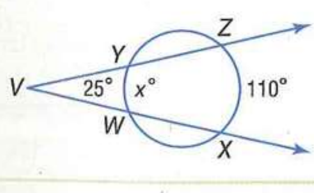

$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} - m\widehat{XBY})$ النظرية 6.14

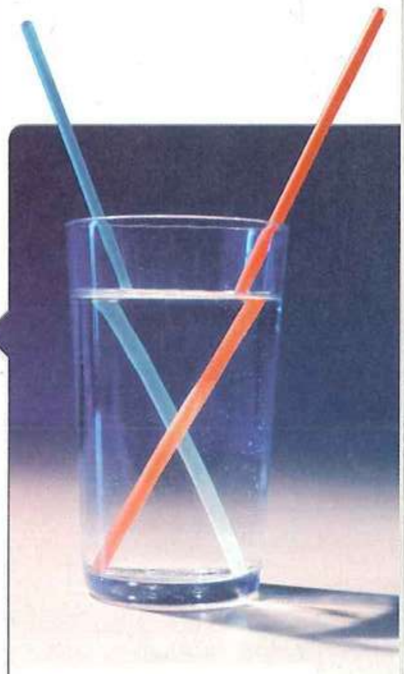
$= \frac{1}{2}(128 - 84)$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}(44) = 22$ بسّط

### تمرين موجّه

**4.** جـد قيمة $x$.



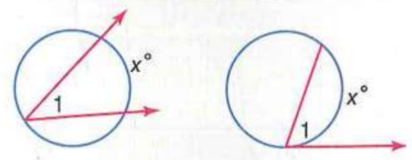
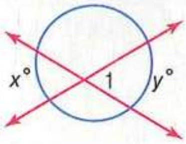
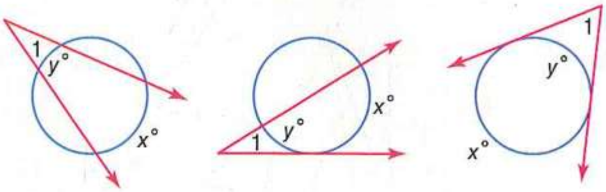



### الربط بالحياة اليومية

هناك فرقٌ في مؤشر الانكسار بين الوسيطين كالهواء والزجاج. ويعطى مؤشر الانكسار $N$ بدلالة المعادلة $N = \frac{c}{V}$.
حيث $c$ سرعة الضوء و $V$ السرعة المتجهة للضوء في تلك المادة

**المصدر:** مركز الموارد المجهرية

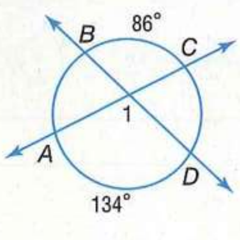
## المفهوم الأساسي علاقات الزوايا والدوائر

| رأس الزاوية | النموذج (النماذج) | قياس الزاوية |
|---|---|---|
| **على محيط الدائرة** |  | نصف قياس القوس المحصور $m\angle 1 = \frac{1}{2}x$ |
| **داخل الدائرة** |  | نصف قياس مجموع القوسين المحصورين $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x + y)$ |
| **خارج الدائرة** |  | نصف قياس فرق القوسين المحصورين $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x - y)$ |

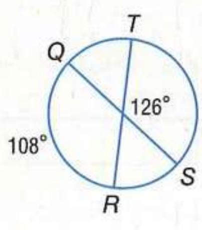
## التحقق من فهمك

**المثالان 1 و 2** جـد كل قياس، بفرض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

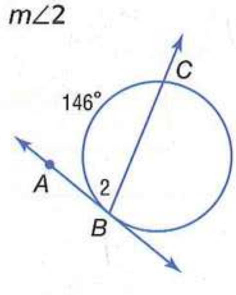
1. $m\angle 1$




2. $m\widehat{TS}$

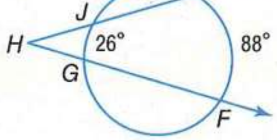



3. $m\angle 2$

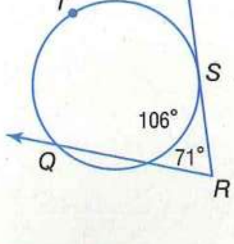



**المثالان 3 و 4**

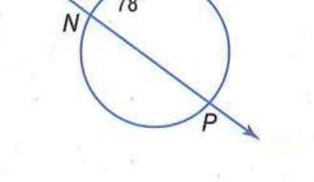
4. $m\angle H$



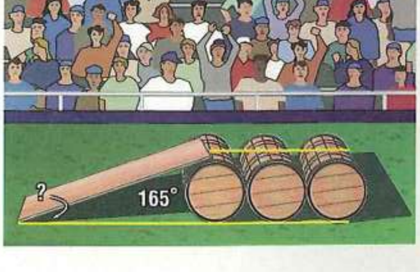

5. $m\widehat{QTS}$




6. $m\widehat{LP}$



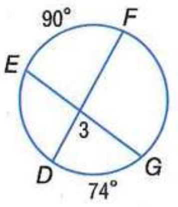

7. **الألعاب البهلوانية** يربطُ منحدرٌ إلى الإسطوانة الأولى لصفٍ من الأسطوانات المرصوصة بجوار بعضها والمعدّة لعرضٍ بهلوانيٍ في السيرك بواسطة دراجةٍ نارية. فما قياس الزاويةُ التي يشكّلها المنحدر مع الأرض؟



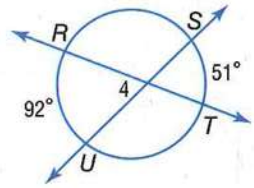
## التمرين وحل المسائل

**المثالان 1 و 2** **جـد كل قياس، بفرض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.**

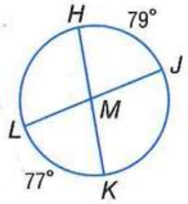
**8.** $m\angle 3$



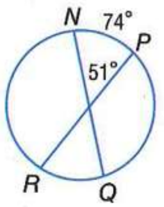

**9.** $m\angle 4$



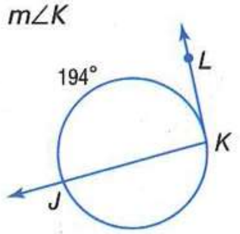

**10.** $m\angle JMK$



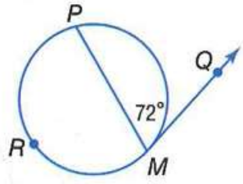

**11** $m\widehat{RQ}$



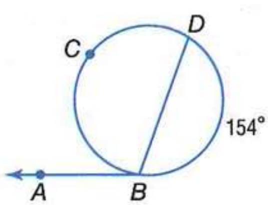

**12.** $m\angle K$



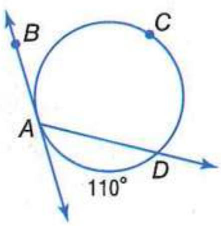

**13.** $m\widehat{PM}$



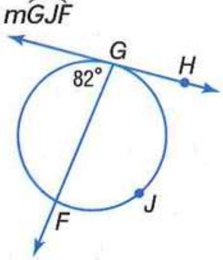

**14.** $m\angle ABD$

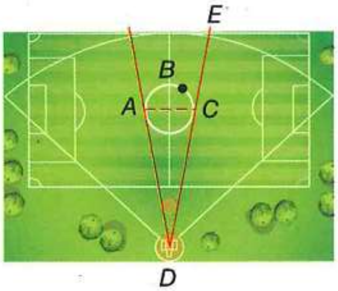



**15.** $m\angle DAB$




**16.** $m\widehat{GJF}$



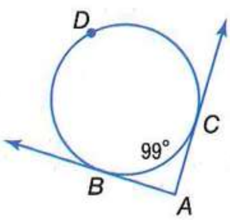

**17.** **الرياضة** يتضمن ميدان الرياضات المتعددة الموضح ملعبًا للكرة اللينة وملعبًا لكرة القدم. فإذا كان، قياس $m\widehat{ABC} = 200$ جـد كلاً من القياسات.

**a.** $m\angle ACE$

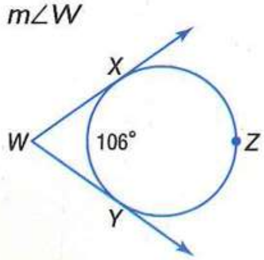
**b.** $m\angle ADC$

**المثالان 3 و 4** **البنية** **جـد كلاً من القياسات.**

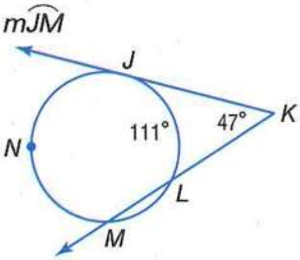
**18.** $m\angle A$



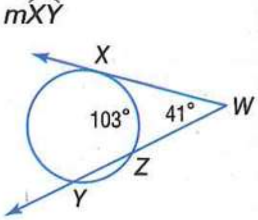

**19.** $m\angle W$



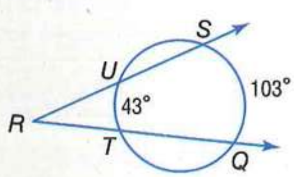

**20.** $m\widehat{JM}$



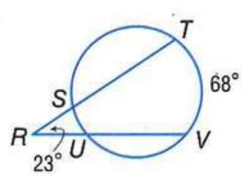

**21.** $m\widehat{XY}$

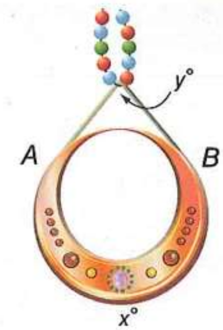



**22.** $m\angle R$



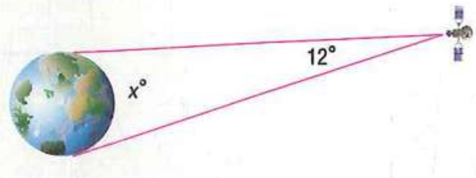

**23.** $m\widehat{SU}$





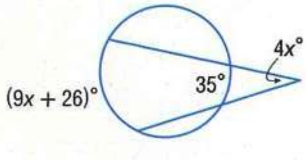

**24. المجوهرات** في القلادة الدائرية الموضحة، $A$ و $B$ نقطتا تماس. فإذا كانت قيمة $x = 260$، فكم تساوي قيمة $y$؟

**25. الفضاء** يدور قمر صناعي حول خط الاستواء في الكرة الأرضية. جـد قيمة $x$، قياس قوس الكوكب الذي يمكن رؤيته من القمر الصناعي.

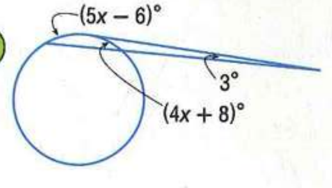



**الجبر** جـد قيمة $x$.

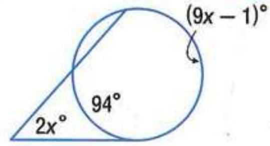
**26.**




**27**




**28.**




**29. التصوير** يصوّر مصورٌ دائرة صور بواسطة آلة التصوير خاصته كما هو موضح بحيث يشكل خطا الرؤية خطي تماسٍ مع دائرة صور.

**a.** إذا كانت زاوية عرض آلة التصوير تساوي 35°، فما قياس قوس دائرة الصور التي تظهر في اللقطة؟

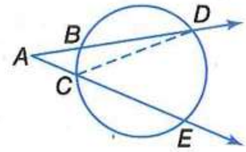
**b.** إذا أردت التقاط قياسٍ للقوس يساوي 150° ضمن الصورة، فما هي قيمة زاوية العرض التي ينبغي استخدامها؟


**الفرضيات** لكل حالة في النظرية 6.14، اكتب برهانًا مكوّنًا من عمودين.

**30. الحالة 1**

**المعطى:** القاطعان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$

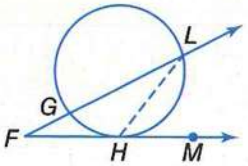
**المطلوب إثباته:** $m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$




**31. الحالة 2**

**المعطى:** المماس $\overrightarrow{FM}$ والقاطع $\overrightarrow{FL}$

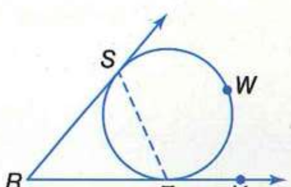
**المطلوب إثباته:** $m\angle F = \frac{1}{2}(m\widehat{LH} - m\widehat{GH})$




**32. الحالة 3**

**المعطى:** المماسان $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{RV}$

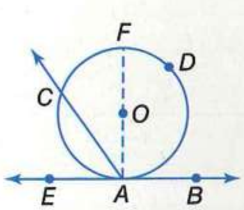
**المطلوب إثباته:** $m\angle R = \frac{1}{2}(m\widehat{SWT} - m\widehat{ST})$




**33. الإثبات** اكتب فقرة إثبات للنظرية 6.13.

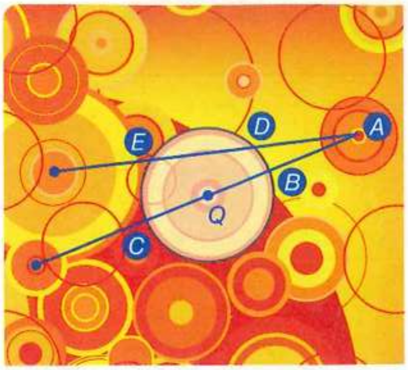
**a. المعطيات:** $\overleftrightarrow{AB}$ هو مماسّ للدائرة $\odot O$.
$\overleftrightarrow{AC}$ هو قاطعٌ للدائرة $\odot O$.
$\angle CAE$ زاوية حادة.

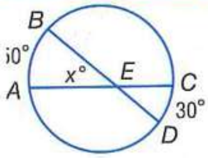
**المطلوب إثباته:** $m\angle CAE = \frac{1}{2} m\widehat{CA}$




**b.** أثبت أنه إذا كانت الزاوية $\angle CAB$ زاوية منفرجة، فإن $m\angle CAB = \frac{1}{2} m\widehat{CDA}$.

**34. ورق الجدران** في التصميم المبين لورق الجدران، لديك $\overline{BC}$ قطرٌ في الدائرة $\odot Q$. فإذا كانت $m\angle A = 26$ و $m\widehat{CE} = 67$، فما قياس $m\widehat{DE}$؟




**35. التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على العلاقة بين النظريتين 6.12 و 6.6.

**a. هندسيًا** انسخ الشكل الموضح. ثم ارسم ثلاثة أشكالٍ متعاقبةٍ يقترب فيها موضع النقطة $D$ من النقطة $C$، على أن تظلّ النقاط $A$ و $B$ و $C$ ثابتة.

**b. جدوليّ** قدّر قياس $\widehat{CD}$ لكلٍ من الدوائر المتعاقبة، مع تسجيل قياس $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ في الجدول. ثم احسب قيمة $x$ لكل دائرةٍ وسجّلها.

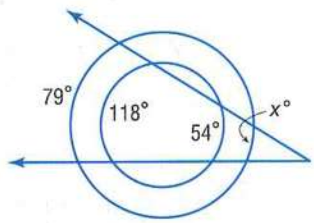
**c. لفظيًا** صِف العلاقة بين $m\widehat{AB}$ وقيمة $x$ مع اقتراب $m\widehat{CD}$ من الصفر. ما نوع الزاوية التي تتحول إليها $\angle AEB$ عندما يكون $m\widehat{CD} = 0$؟

**d. تحليلي** اكتب برهانًا جبريًا لتوضح العلاقة بين النظريتين 6.12 و 6.6 الموصوفتين في الجزء c.

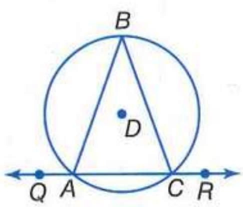
## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

**36. الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد قياس زاويةٍ يشكّلها قاطعٌ ومماسٌ يتقاطعان خارج دائرة.

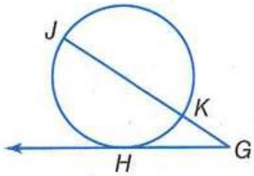
**37. التحدي** الدائرتان أدناه متّحدتا المركز. فما قيمة $x$؟




**38. التدبير** يحاط المثلث متساوي الساقين $\triangle ABC$ بالدائرة $\odot D$. وما الذي يمكنك استنتاجه حول $m\widehat{BC}$ و $m\widehat{AB}$؟ اشرح.




**39. الفرضيات** في الشكل $\overline{JK}$ قطر و $\overrightarrow{GH}$ مماس.




**a.** صِف مدى القيم الممكنة لـ $m\angle G$. اشرح.

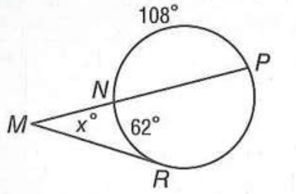
**b.** إذا كانت $m\angle G = 34$. جـد قياس القوسين الأصغرين $HJ$ و $KH$. واشرح.

**40. مسألة غير محددة الإجابة** ارسم دائرةً ومماسين يتقاطعان خارج الدائرة. واستخدم منقلةً لقياس الزاوية المتشكلة. وجـد قياس القوسين الأصغر والأكبر المتشكلين. واشرح استنتاجك.

**41. الكتابة في الرياضيات** تحاط دائرةٌ بالمثلث $\triangle PQR$. فإذا كانت $m\angle P = 50$ و $m\angle Q = 60$، صِف كيفية إيجاد قياس الأقواس الأصغر الثلاثة التي تشكلها نقاط التماس.

## تدريب على الاختبار المعياري

**42.** ما قيمة $x$ إذا كان $m\widehat{NR} = 62$ و $m\widehat{NP} = 108$؟




**A** 23° **C** 64°

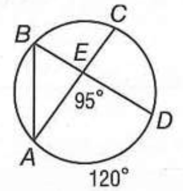
**B** 31° **D** 128°

**43. جبريًا** النقطتان $A(-4, 8)$ و $B(6, 2)$ كلتاهما تقع على الدائرة $C$، و $\overline{AB}$ هو نصف قطر في الدائرة. فما إحداثيا $C$؟

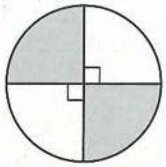
**F** (2, 10) **H** (5, −3)

**G** (10, −6) **J** (1, 5)

**44. الإجابة الشبكية** إذا كانت $m\angle AED = 95$ و $m\widehat{AD} = 120$، فما قياس $m\angle BAC$؟




**45. SAT/ACT** إذا كان محيط الدائرة المبينة أدناه يساوي $16\pi$ وحدة، فما هي المساحة الكلية للمنطقة المظللة؟



**A** $64\pi$ وحدة مربعة

**B** $32\pi$ وحدة مربعة

**C** $12\pi$ وحدة مربعة

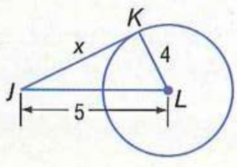
**D** $8\pi$ وحدة مربعة

**E** $2\pi$ وحدة مربعة

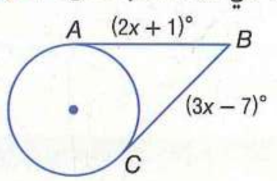
## مراجعة شاملة

**جـد $x$. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.** (الدرس 5-6)

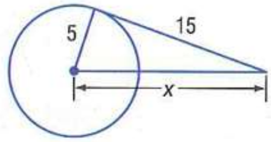
**46.**




**47.**



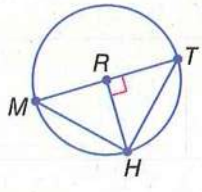

**48.**




**49. البرهان** اكتب برهانًا من عمودين. (الدرس 4-6)

**المعطيات:** $\widehat{MHT}$ نصف دائرة؛ $\overline{RH} \perp \overline{TM}$.

**المطلوب إثباته:** $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$




**الهندسة الإحداثية جـد قياس كل زاوية مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة باستخدام قانون المسافة والنسب المثلثية العكسيّة.**

**50.** $\angle C$ في المثلث $BCD$ ذي الرؤوس $B(-1, -5)$ و $C(-6, -5)$ و $D(-1, 2)$

**51.** $\angle X$ في المثلث القائم $XYZ$ ذي الرؤوس $X(2, 2)$ و $Y(2, -2)$ و $Z(7, -2)$

## مراجعة المهارات

**حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

**52.** $x^2 + 13x = -36$

**53.** $x^2 - 6x = -9$

**54.** $3x^2 + 15x = 0$

**55.** $28 = x^2 + 3x$

**56.** $x^2 + 12x + 36 = 0$

**57.** $x^2 + 5x = -\frac{25}{4}$

الدرس 6-7

# القطع الخاصة في الدائرة

| السابق | الحالي | لماذا؟ |
| --- | --- | --- |
| • وجدت قياسي القطرين اللذين يتقاطعان داخل متوازي الأضلاع. | **1** إيجاد قياسات القطع المستقيمة التي تتقاطع داخل دائرة.<br>**2** إيجاد قياسات القطع المستقيمة التي تتقاطع خارج دائرة. | • تُقطع كعكةٌ دائريةٌ بالاتجاه الطولي بدلاً من أن تقطع إلى مثلثات لكي تقدّم إلى عددٍ أكبر من حضور حفل عشاء. ويتبقى جزءٌ صغيرٌ فقط من الكعكة الأصلية. يمكنك باستخدام هندسة الدوائر تحديد قطر الكعكة الأصلية. |

**المفردات الجديدة**
قطعة الوتر
chord segment
قطعة القاطع
secant segment
قطعة القاطع الخارجي
external secant segment
قطعة المماس
tangent segment

**ممارسات في الرياضيات**
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

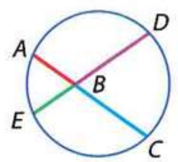
## 1 القطع المستقيمة التي تتقاطع داخل دائرة

عندما يتقاطع وتران داخل دائرة، يُقسم كل وترٍ إلى قطعتين مستقيمتين، تدعيان **قطعتي الوتر**.

**النظرية 6.15 القطع المستقيمة في نظرية الأوتار**

**الشرح** إذا تقاطع وتران في دائرة، فتتساوى حينها نواتج ضرب أطوال القطع المستقيمة للأوتار.

**مثال** $AB \cdot BC = DB \cdot BE$

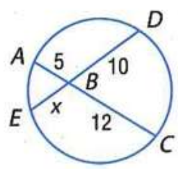



سوف تثبت النظرية 6.15 في التمرين 23.

**مثال 1 استخدام تقاطع وترين**

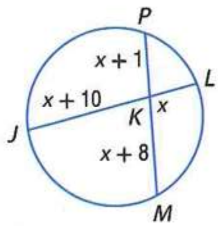
**جـد قيمة x.**

**a.**




| | |
| --- | --- |
| $AB \cdot BC = EB \cdot BD$ | النظرية 6.15 |
| $5 \cdot 12 = x \cdot 10$ | بالتعويض |
| $60 = 10x$ | بالضرب. |
| $6 = x$ | بقسمة كل طرف على 10. |

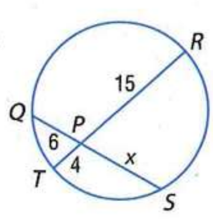
**b.**



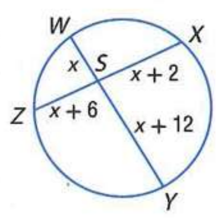

| | |
| --- | --- |
| $JK \cdot KL = PK \cdot KM$ | النظرية 6.15 |
| $(x + 10) \cdot x = (x + 1)(x + 8)$ | بالتعويض |
| $x^2 + 10x = x^2 + 9x + 8$ | بالضرب. |
| $10x = 9x + 8$ | بطرح $x^2$ من كل طرف. |
| $x = 8$ | بطرح $9x$ من كل طرف. |

**تمرين موجّه**

**1A.**

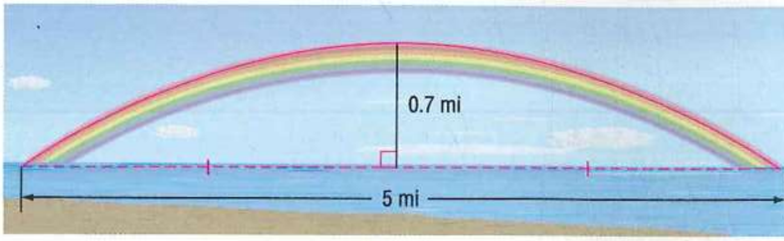



**1B.**



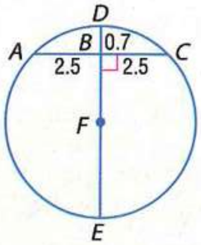
## مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد قياس قطع مستقيمة في دائرة

**العلوم** **الشكل الصحيح لقوس قُزح هو دائرةٌ كاملة. ولكننا لا نرى سوى قوس الدائرة الذي يظهر فوق أفق الكرة الأرضية. فما هو نصف قطر الدائرة التي تضم القوس الخاص بقوس قزح الموضح؟**




**الاستيعاب** تعلم أن قوس قُزح هو جزء من دائرة كاملة. $\overset{\frown}{AC}$ قوس في هذه الدائرة، و $\overline{DB}$ منصّف عمودي لـ $\overline{AC}$.

**التخطيط** ارسم نموذجًا. وبما أنه يقطع الوتر $\overline{AC}$ فإن $\overline{DE}$ قطر في الدائرة. استخدم نواتج ضرب أطوال الأوتار المتقاطعة لإيجاد طول قطر الدائرة.

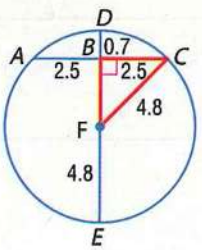



**جـد حلّ**

| | |
|---|---|
| $AB \cdot BC = DB \cdot BE$ | النظرية 6.15 |
| $2.5 \cdot 2.5 = 0.7 \cdot BE$ | بالتعويض |
| $6.25 = 0.7BE$ | بالضرب. |
| $8.9 \approx BE$ | بقسمة كل طرف على 0.7. |
| $DE = DB + BE$ | فرضية جمع القطع المستقيمة |
| $= 0.7 + 8.9$ | بالتعويض |
| $= 9.6$ | بالجمع. |

بما أن طول قطر الدائرة يساوي 9.6 mi تقريبًا، فإن نصف القطر يساوي $9.6 \div 2$ أو 4.8 mi.

**التحقق** استخدم نظرية فيثاغورس للتحقق من المثلث المتشكل في الدائرة من نصف القطر والوتر وجزءٍ من قطر الدائرة.




| | |
|---|---|
| $DB + BF = DF$ | مسلّمة جمع القطع المستقيمة |
| $0.7 + BF = 4.8$ | بالتعويض |
| $BF = 4.1$ | بطرح 0.7 من كل طرف. |
| $BF^2 + BC^2 = CF^2$ | نظرية فيثاغورس |
| $4.1^2 + 2.5^2 \stackrel{?}{=} 4.8^2$ | بالتعويض |
| $23.06 \approx 23.04$ ✓ | بسّط. |

### تمرين موجّه

**2. مرصد النجوم** ترتفع أعلى نقطةٍ في مرصد النجوم، أو ما يسمى الذروة، 63.4 m، و قطر الدائرة التي تضم القوس يساوي 216.4 m. فما طول الملعب من طرفٍ إلى الطرف الآخر؟

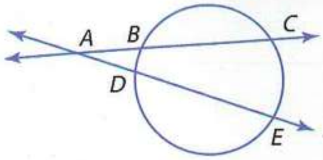
### الربط بالحياة اليومية

كلما هبطت الشمس إلى الأفق، ازداد الجزء الذي تستطيع رؤيته من قوس قُزح. وعند الغروب، يمكنك رؤية نصف دائرةٍ كاملٍ من قوس قُزح بحيث تقع قمة القوس فوق الأفق بـ 42 درجة.

**المصدر:** المركز الوطني لأبحاث الغلاف الجوي

### نصيحة في حل المسائل

**إنشاء رسم** عند حل مسائل كلاميةٍ عن الدوائر، فمن المفيد إنشاء رسم وتسمية الأجزاء المعلومة في الدائرة. استخدم متغيرًا لتسمية القياس المجهول.




## 2 القطع المستقيمة التي تتقاطع خارج دائرة

**قطعة القاطع** هي قطعة من مستقيم قاطع له بالتحديد نقطة طرفيةٌ واحدةٌ تقع على الدائرة. في الشكل، $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AE}$ و $\overline{AD}$ قطعتان مستقيمتان من قاطع.

تدعى قطعة القاطع الواقعة في خارج الدائرة باسم **قطعة القاطع الخارجية**. في الشكل، $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ قطعتان من قاطعٍ خارجي.

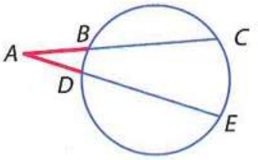
توجد علاقة خاصة بين القواطع وقطع القواطع الخارجية.

**نصيحة دراسية**

**بسّط النظرية** كل طرف في المعادلة الواردة في النظرية 6.16 هو ناتج ضرب طولي الجزء الخارجي والقطعة المستقيمة الكاملة.

### النظرية 6.16 نظرية القطع المستقيمة القاطعة

**الشرح** إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة، فإن ناتج ضرب قطعة مستقيمة قاطعة وقطعتها المستقيمة القاطعةالخارجية يساوي ناتج ضرب قياسي القاطع الآخر بقطعته المستقيمة القاطعة الخارجية.

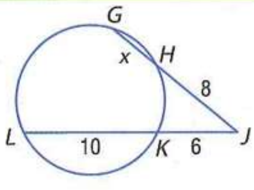



**مثال** $AC \cdot AB = AE \cdot AD$

سوف تثبت النظرية 6.16 في التمرين 24.

### مثال 3 استخدام تقاطع وترين

**جـد قيمة $x$.**



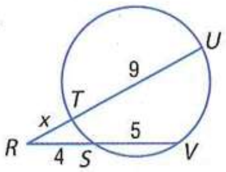

| | |
|---|---|
| $JG \cdot JH = JL \cdot JK$ | النظرية 6.16 |
| $(x + 8)8 = (10 + 6)6$ | بالتعويض |
| $8x + 64 = 96$ | بالضرب. |
| $8x = 32$ | بطرح 64 من كل طرف. |
| $x = 4$ | بقسمة كل طرف على 8. |

**انتبه!**

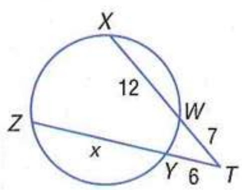
**استخدم المعادلة الصحيحة**
تحقق من ضرب طول القطعة المستقيمة للقاطع بطول القطعة المستقيمة الخارجية للقاطع. ولا تضرب طول القطعة المستقيمة الداخلية للقاطع، أو الوتر، بطول القطعة المستقيمة الخارجية للقاطع.

**تمرين موجّه**

**3A.**



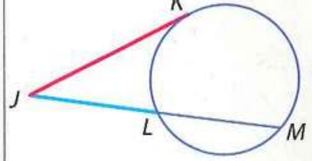

**3B.**




يمكن استخدام معادلة شبيهة للمعادلة الواردة في النظرية 6.16 عندما يتقاطع قاطع ومماس خارج دائرة. وفي هذه الحالة، تكون **القطعة المستقيمة المماسية**، أو القطعة المستقيمة للمماس والتي تقع نقطتها الطرفية على محيط الدائرة، قطعةً مستقيمةً وخارجيةً في آنٍ واحد.

### النظرية 6.17

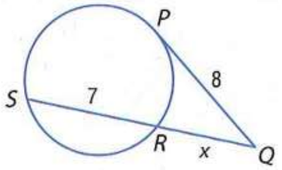
**الشرح** إذا تقاطع مماس وقاطع خارج دائرة، فإن مربع قياس المماس يساوي ناتج ضرب قياسي القاطع بقطعته المستقيمة القاطعة الخارجية.




**مثال** $JK^2 = JL \cdot JM$

سوف تثبت النظرية 6.17 في التمرين 25.

## مثال 4 استخدام تقاطع قاطع ومماس




**$\overline{PQ}$ مماس للدائرة. جـد $x$. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.**

| | |
|---|---|
| $PQ^2 = QR \cdot QS$ | النظرية 6.17 |
| $8^2 = x(x + 7)$ | بالتعويض |
| $64 = x^2 + 7x$ | بالضرب. |
| $0 = x^2 + 7x - 64$ | بطرح 64 من كل طرف. |

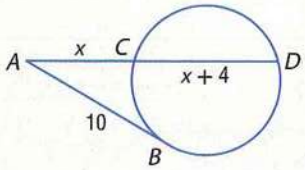
بما أن التعبير غير قابل للتحليل إلى عوامله الأولية، فاستخدم القانون العام.

| | |
|---|---|
| $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | القانون العام |
| $= \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-64)}}{2(1)}$ | $a = 1$ و $b = 7$ و $c = -64$ |
| $= \dfrac{-7 \pm \sqrt{305}}{2}$ | بسّط. |
| $\approx 5.2$ أو $-12.2$ | باستخدام الآلة الحاسبة. |

نظرًا إلى أن الأطوال لا يمكن أن تكون سالبة، فإن قيمة $x$ تساوي 5.2 تقريبًا.

### تمرين موجّه

**4.** $\overline{AB}$ مماسّ للدائرة. جـد قيمة $x$. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

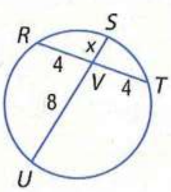



## التحقق من فهمك

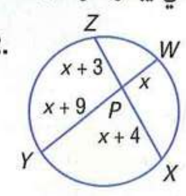
الأمثلة 1 و 3 و 4

**جـد قيمة $x$. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.**

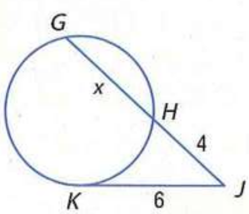
**1.**



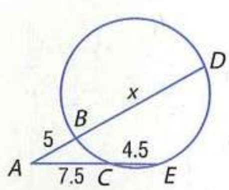

**2.**




**3.**

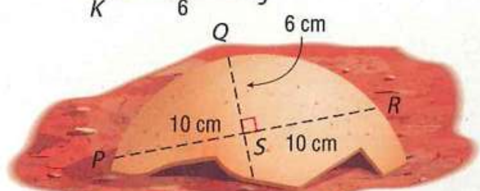



**4.**



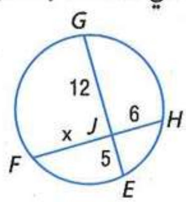

مثال 2

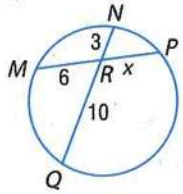
**5** **العلم** يوضح الشكل قطعةً من آنيةٍ فخاريةٍ مكسورةٍ وجدت في أحد المواقع الأثرية. تقع $\overline{QS}$ على نصف قطرالدائرة. فما هو محيط الآنية الأصلية؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.

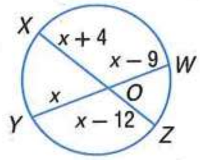


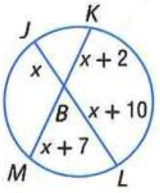
## التمرين وحل المسائل

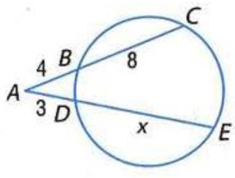
**الأمثلة 1 و 3 و 4** جـد قيمة $x$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

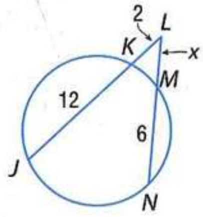
**6.**


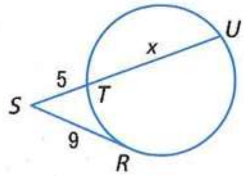

**7.**


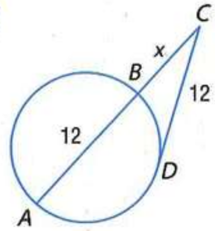

**8.**



**9.**



**10.**



**11.**


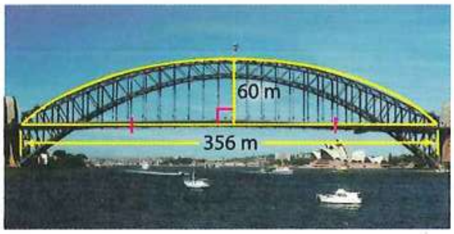

**12.**


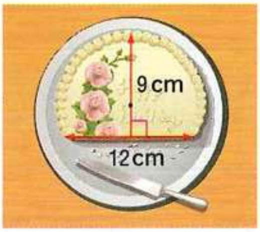

**13**



**مثال 2**

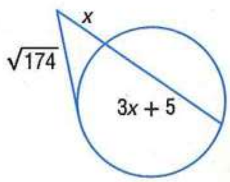
**14. الجسور** ما هو قطر الدائرة التي تحوي قوس جسر هاربور بسيدني؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

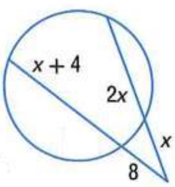
**15. الكعك** تقدّم هدى الكعك خلال حفل عشاء. فإذا كانت أبعاد الكعكة المتبقية موضحةً أدناه، فكم كان القطر الأصلي للكعكة؟

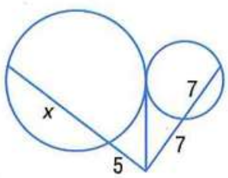


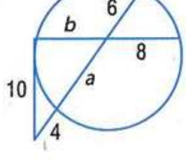



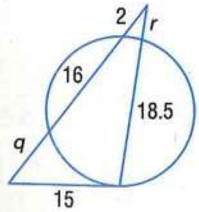

**البنية** جـد كل متغيرٍ مقربًا إلى أقرب عُشر. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

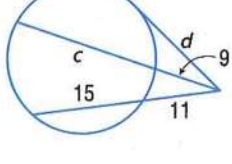
**16.**



**17.**



**18.**



**19.**



**20.**



**21.**


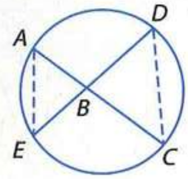
**22. القياس غير المباشر** تجلس ياسمين على بعد 4.88 m من شجرة سيكويا عملاقة، وتقف هيام بجوارالشجرة. المسافة التي تفصل ياسمين عن هيام تساوي 8.23 m. صمم رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة، ثم جــدقطر الشجرة.

**البرهان** **برهن كل نظرية.**

**23.** البرهان المكوّن من عمودين للنظرية 6.15

**المعطى:** $\overline{AC}$ و$\overline{DE}$ يتقاطعان عند $B$.

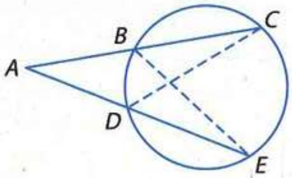
**المطلوب إثباته:** $AB \cdot BC = EB \cdot BD$




**24.** فقرة برهان النظرية 6.16

**المعطى:** القاطعان $\overline{AC}$ و $\overline{AE}$

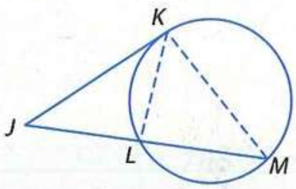
**المطلوب إثباته:** $AB \cdot AC = AD \cdot AE$




**25.** البرهان المكوّن من عمودين للنظرية 6.17

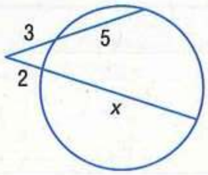
**المعطى:** المماس $\overline{JK}$، القاطع $\overline{JM}$

**المطلوب إثباته:** $JK^2 = JL \cdot JM$



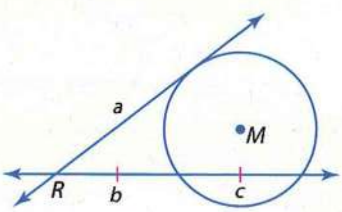

## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

**26. النقد** توجِد منى ومها قيمة $x$ في الشكل المبيّن على الجهة اليسرى. كتبت منى: $2x = 3(5)$، وكتبت مها : $3(8) = 2(2 + x)$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.




**27. الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل طرق إيجاد قياس القطع المستقيمة عندما يتقاطع قاطعان خارج دائرةٍ وعندما يتقاطع قاطعٌ ومماسٌ خارج دائرة.

**28. التحدي** في الشكل، يتقاطع خط مماس للدائرة M ومستقيمٌ قاطعٌ لها عند $R$. جــد $a$. وبيّن الخطوات التي استخدمتها.




**29. التبرير** عندما يتقاطع وتران في مركز دائرة، فهل يتساوى قياس أقواس التقاطع أحيانًا أو دائمًا أو أنها لا تتساوى على الإطلاق؟

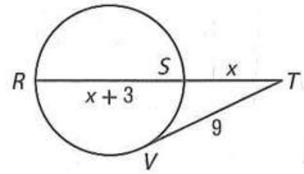
**30. مسألة غير محددة الإجابة** استكشف النظرية 6.17 عبر رسم دائرةٍ يتقاطع خارجها قاطعٌ وتماسٌ وتسميتها. قِس جزئي القطعة المستقيمة المماسية وسمِّهما وقرِّب طوليهما إلى أقرب جزءٍ من عشرة من السنتيمتر. واستخدم معادلة لإيجاد قياس القطعة المستقيمة المماسية. وتحقق من حلّك عبر قياس طول القطعة المستقيمة.

**31. الكتابة في الرياضيات** صِف العلاقة بين قطعٍ مستقيمةٍ في دائرةٍ عندما يتقاطع قاطعان داخل الدائرة.

## تدريب على الاختبار المعياري

**.32** $\overline{TV}$ مماس للدائرة، و $R$ و $S$ نقطتان تقعانعلى محيط الدائرة. فما هي قيمة $x$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة؟

**A** 7.6 **C** 5.7
**B** 6.4 **D** 4.8



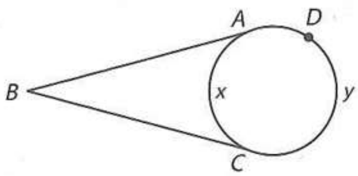

**.33 الجبر** يعرض متجرٌ متعدد الأقسام تخفيضًا بنسبة 40% على جميع أنواع المجوهرات فيه. فإذا كان هناك عرضٌ آخر يمنحك تخفيضًا إضافيًا بنسبة 20% عن السعر المخفّض في الأصل. فكم ستدفع لشراء خاتمٍ سعره الأصلي AED 200؟

**F** AED 80 **H** AED 120
**G** AED 96 **J** AED 140

**.34 الإجابة الموسّعة** قياسا القوس الأصغر $\widehat{AC}$ والقوس الأكبر $\widehat{ADC}$ بالدرجات هما $x$ و $y$ على التوالي.

**a.** إذا كانت $m\angle ABC = 70°$، فاكتب معادلتين تربطان $x$ و $y$.

**b.** جـد $x$ و $y$.

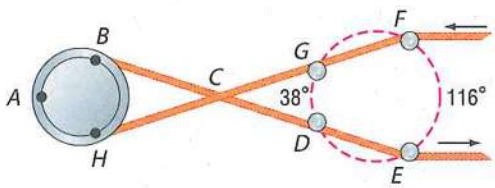



**.35 SAT/ACT** خلال أول أسبوعين من العطلة الصيفية، كانت نبيلة تكسب AED 100 في الأسبوع. وخلال الأسابيع السّتة التالية، كانت تكسب AED 150 في الأسبوع. فكم كان أجرها الأسبوعي المتوسط؟

**A** AED 50 **D** AED 135
**B** AED 112.50 **E** AED 137.50
**C** AED 125

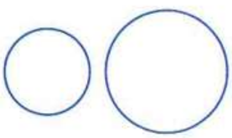
## مراجعة شاملة

**.36 النسيج** حالما يُنسج خيطٌ من ألياف الصوف، فإنه يُصبغ في أغلب الأحيان، ومن ثمّ يُمرّر عبر مسارٍ من البكرات كي يجف. نوضح في الشكل مجموعة واحدة من البكرات. لاحظ أنه يبدو أن الخيط يتقاطع مع نفسه عند $C$، ولكن الأمر ليس كذلك في الواقع. استخدم المعلومات من الشكل لإيجاد $m\widehat{BH}$. (الدرس 5-6)

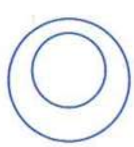



**انسخ الشكل وارسم المماسات المشتركة. فإن لم تكن هناك مماساتٌ مشتركة، فقل: *لا مماسات مشتركة*.** (الدرس 5-6)

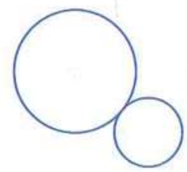
**37.**



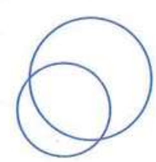
**38.**



**39.**

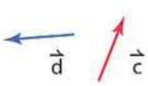


**40.**

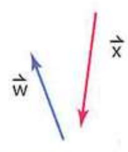


**انسخ المتجهات لإيجاد كل مجموعٍ أو فرق.**

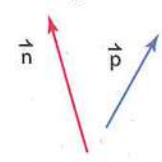
**41.** $\vec{c} - \vec{d}$




**42.** $\vec{w} + \vec{x}$




**43.** $\vec{n} - \vec{p}$




## مراجعة المهارات

**اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمستقيم ذي الميل ونقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y$ المعطيين.**

**.44** $m$: 3، نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y$: $-4$

**.45** $m$: 2, (0, 8)

**.46** $m$: $\frac{5}{8}$, (0, −6)

**.47** $m$: $\frac{2}{9}$، نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y$: $\frac{1}{3}$

**.48** $m$: −1, $b$: −3

**.49** $m$: $-\frac{1}{12}$, $b$: 1

# الدرس 6-8 معادلة الدائرة

**:: السابق**

- كَتبتَ معادلات مستقيماتٍ باستخدام معلوماتٍ عن تمثيلاتها البيانية.

**:: الحالي**

1. كتابة معادلة دائرة.
2. تمثيل دائرة على المستوى الإحداثي.

**:: لماذا**

- تطلق أبراج الاتصالات إشاراتٍ لا سلكيةً تستخدم لنقل المكالمات الخلوية. ويغطي كل برجٍ مساحةً دائرية، وتُرتَّب الأبراج بحيث تتاح الإشارة في أي موقعٍ ضمن منطقة التغطية.

**المفردات الجديدة**

المحل الهندسي المركب (compound locus)

**ممارسات في الرياضيات**

التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

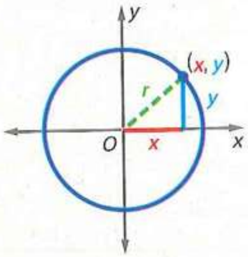
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

## 1 معادلة الدائرة

بما أن جميع النقاط على محيط دائرة متساوية البعد عن المركز، فيمكنك إيجاد معادلة دائرةٍ عبر استخدام قانون المسافة.

لتكن $(x, y)$ تمثّل نقطةً في دائرةٍ يقع مركزها عند نقطة الأصل. باستخدام نظرية فيثاغورس، يكون $x^2 + y^2 = r^2$.

افترض الآن أن المركز لا يقع عند نقطة الأصل، بل عند النقطة $(h, k)$. يمكنك استخدام قانون المسافة لوضع معادلةٍ للدائرة.




$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

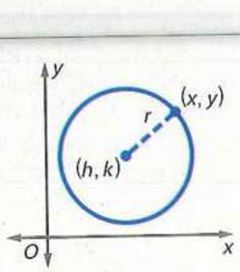
$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$ $d = r, (x_1, y_1) = (h, k), (x_2, y_2) = (x, y)$

$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$ بتربيع كل طرف.

### المفهوم الأساسي معادلة دائرة بالصيغة القياسية

إن الصيغة القياسية لمعادلة دائرةٍ يقع مركزها عند النقطة $(h, k)$ ونصف قطرها $r$ هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

تدعى الصيغة القياسية لمعادلة دائرةٍ أيضًا بصيغة *المركز–نصف القطر*.




### مثال 1 كتابة معادلة باستخدام المركز ونصف القطر

**اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.**

**a. مركزها النقطة $(1, -8)$، ونصف قطرها يساوي 7**

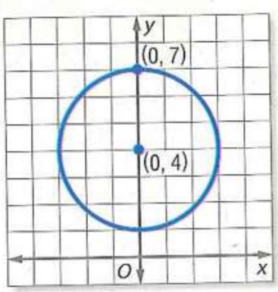
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$(x - 1)^2 + [y - (-8)]^2 = 7^2$ $(h, k) = (1, -8), r = 7$

$(x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 49$ بسّط.

**b. الدائرة الممثلة بيانيًا على اليسار**

**مركزها عند النقطة $(0, 4)$، ونصف قطرها يساوي 3.**




$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$ $(h, k) = (0, 4), r = 3$

$x^2 + (y - 4)^2 = 9$ بسّط.

**تمرين موجّه**

**1A.** المركز عند نقطة الأصل، نصف القطر يساوي $\sqrt{10}$ **1B.** المركز عند النقطة $(4, -1)$، نصف القطر يساوي 8

## مثال 2 كتابة معادلة باستخدام المركز ونقطة

**اكتب معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة $(-2, 4)$، وتمرّ بالنقطة $(-6, 7)$.**

**الخطوة 1** جـد المسافة بين النقطتين لتحديد نصف القطر.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{[-6 - (-2)]^2 + (7 - 4)^2}$ $(x_1, y_1) = (-2, 4)$ و $(x_2, y_2) = (-6, 7)$

$= \sqrt{25}$ أو 5 بسّط.

**الخطوة 2** اكتب المعادلة باستخدام $h = -2$ و $k = 4$ و $r = 5$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ $h = -2$ و $k = 4$ و $r = 5$

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ بسّط.

**تمرين موجّه**

**2.** اكتب معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة $(-5, -3)$ وتمرّ بالنقطة $(0, 0)$.

## 2 تمثيل الدوائر بيانيًا

يمكنك استخدام معادلة دائرة لتمثيلها بيانيًا على مستوىً إحداثي. وللقيام بذلك، فإنك بحاجةٍ إلى كتابة المعادلة بالصيغة القياسية أولاً.

## مثال 3 تمثيل دائرة بيانيًا

**معادلة الدائرة هي $x^2 + y^2 - 8x + 2y = -8$. اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

اكتب معادلةً بالصيغة القياسية عبر إكمال المربع.

$x^2 + y^2 - 8x + 2y = -8$ المعادلة الأصلية

$x^2 - 8x + y^2 + 2y = -8$ بعزل الحدود المتشابهة وتجميعها.

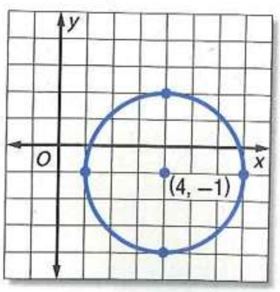
$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = -8 + 16 + 1$ بإكمال المربعات.

$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ بالتحليل إلى العوامل والتبسيط.

$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$ اكتب $+1$ بالصيغة $-(-1)$ و 9 بالصيغة $3^2$.

بما أن المعادلة مكتوبةٌ الآن بالصيغة القياسية، فيمكنك تحديد $h$ و $k$ و $r$.

$$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$$
$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$




إذًا، $h = 4$ و $k = -1$ و $r = 3$. يقع المركز عند النقطة $(4, -1)$، ونصف القطر يساوي 3. مثّل المركز وأربع نقاط تبعد كل منها 3 وحدات عن هذه النقطة. وارسم الدائرة التي تمرّ بهذه النقاط الأربع.

**نصيحة دراسية**

**إكمال المربع**
لإكمال المربع لأي تعبيرٍ تربيعي من الصيغة $x^2 + bx$ اتبع الخطوات التالية.
**الخطوة 1** جـد نصفًا واحدًا لـ b.
**الخطوة 2** ربّع ناتج الخطوة 1.
**الخطوة 3** اجمع ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.

**تمرين موجّه**

**من أجل كل دائرةٍ معادلتها معطاة، اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

**3A.** $x^2 + y^2 - 4 = 0$

**3B.** $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 40 = 0$

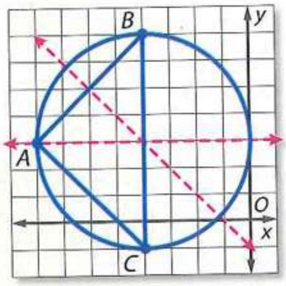
## مثال 4 من الحياة اليومية استخدام ثلاث نقاط لكتابة معادلة

**الأعاصير توضع ثلاث صفّارات إنذار للأعاصير بصورةٍ إستراتيجيةٍ على محيط دائرةٍ تحيط ببلدةٍ بحيث يستطيع جميع القاطنين سماعها. اكتب معادلة الدائرة التي توضع عليها الصفّارات إذا كانت إحداثيات الصفّارات هي $A(-8, 3)$ و $B(-4, 7)$ و $C(-4, -1)$.**

**الاستيعاب** لديك ثلاث نقاطٍ تقع على محيط دائرة.

**التخطيط** مثّل المثلث $\triangle ABC$ بيانيًا. وأنشئ المنصّفين المتعامدين لضلعين من أجل تحديد مركز الدائرة. ثم جـد نصف القطر.

استخدم المركز ونصف القطر لكتابة معادلة.




**الحل** يبدو أن المركز يقع عند النقطة $(-4, 3)$.
ونصف القطر يساوي 4. اكتب معادلة.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-4)]^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

**التحقّق** تحقّق من المركز عبر إيجاد معادلتي المنصّفين وحلّ نظام المعادلات. وتحقق من نصف القطر عبر إيجادالمسافة بين المركز ونقطةٍ أخرى على الدائرة. ✔

### تمرين موجّه

**4.** اكتب معادلة دائرةٍ تضم النقاط $R(1, 2)$ و $S(-3, 4)$ و $T(-5, 0)$.

### الربط بالحياة اليومية

يُبلغ عن حوالي 1000 إعصار في جميع أنحاء الولايات المتحدة كل عام. ولأعتى الأعاصير سرعة رياح تساوي 400 km/hr أو أكثر. ويمكن أن يتعدى عرض مسار أضرار الإعصار كيلومترًا واحدًا وأن يتعدّى طوله 80 كيلومترًا.

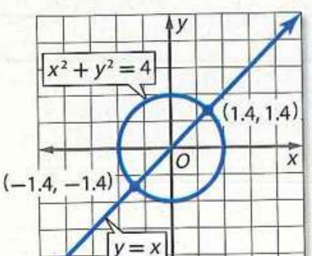
**المصدر:** الإدارة الوطنية للمحيطات والغلاف الجوي

يمكن أن يقطع مستقيمٌ دائرةً في نقطتين على الأكثر. ويمكنك إيجاد نقطة (نقطتي) التقاطع بين دائرة ومستقيم عبر تطبيق التقنيات المستخدمة لإيجاد نقطة التقاطع بين مستقيمين والتقنيات المستخدمة لحلّ المعادلات التربيعية.

## مثال 5 نقاط التقاطع مع دوائر

**جـد نقطة (نقاط) التقاطع بين $x^2 + y^2 = 4$ و $y = x$.**

مثّل هاتين المعادلتين بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.
إن نقاط التقاطع هي حلولٌ لكلتا المعادلتين. ويمكنك تقدير أن هاتين النقطتين تقعان على التمثيل البياني عند النقطتين $(-1.4, -1.4)$ و $(1.4, 1.4)$ تقريبًا. استخدم التعويض لإيجاد إحداثيات هذه النقاط جبريًا.




| | |
|---|---|
| $x^2 + y^2 = 4$ | معادلة الدائرة |
| $x^2 + x^2 = 4$ | بما أن $x = y$، عوّض $x$ مكان $y$. |
| $2x^2 = 4$ | بسّط. |
| $x^2 = 2$ | بقسمة كل طرف على 2. |
| $x = \pm\sqrt{2}$ | بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف. |

إذًا، $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$. استخدم المعادلة $y = x$ لإيجاد قيم $y$ المقابلة.

| | | |
|---|---|---|
| $y = x$ | معادلة مستقيم | $y = x$ |
| $y = -\sqrt{2}$ | $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$ | $y = \sqrt{2}$ |

تتوضع نقاط التقاطع عند $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو عند $(-1.4, -1.4)$ و $(1.4, 1.4)$ تقريبًا. تحقق من هذه الحلول في كلتا المعادلتين الأصليتين.

### نصيحة دراسية

**التقنيات التربيعية** بالإضافة إلى أخذ الجذور التربيعية، تتضمن تقنيات تربيعية أخرى قد تحتاج إلى تطبيقها من أجل حل المعادلات ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ إكمال المربع والتحليل إلى العوامل والقانون العام.
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

### تمرين موجّه

**5.** جـد نقطة (نقاط) التقاطع بين $x^2 + y^2 = 8$ و $y = -x$.

## التحقق من فهمك

**المثالان 1 و 2** **اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.**

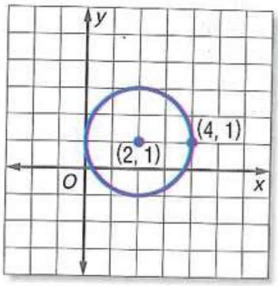
**1.** المركز عند (0 ,9)، نصف القطر يساوي 5

**2.** المركز عند (1 ,3)، نصف القطر يساوي 14

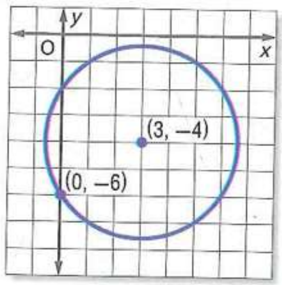
**3.** المركز عند نقطة الأصل، تمر الدائرة بالنقطة (2 ,2)

**4.** المركز عند النقطة (3 ,5−)، تمر الدائرة بالنقطة (4− ,1)

**5.**




**6.**




**مثال 3** **لكل دائرةٍ معادلتها معطاة، اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

**7.** $x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3$

**8.** $x^2 + (y + 1)^2 = 4$

**مثال 4**

**9. المذياع** تُمثّل ثلاثة أبراج مخصصةٍ للمذياع من خلال النقاط $R(4, 5)$ و $S(8, 1)$ و $T(-4, 1)$. حدّد موضع برجٍ آخر متساوي البعد عن الأبراج الثلاثة جميعها، واكتب معادلةً للدائرة.

**10. الاتصالات** يمكن تمثيل ثلاثة أبراج للهواتف الخلوية من خلال النقاط $X(6, 0)$ و $Y(8, 4)$ و $Z(3, 9)$. حدّد موضع برجٍ آخر يبعد المسافة نفسها عن الأبراج الثلاثة، واكتب معادلةً للدائرة.

**مثال 5** **جـد نقطة (نقاط) التقاطع، في حال وجود أي منها، بين كل دائرة ومستقيم لهما المعادلات التالية.**

**11.** $(x - 1)^2 + y^2 = 4$
$y = x + 1$

**12.** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 18$
$y = -2x - 2$

## التمرين وحل المسائل

**المثالان 1 و 2** **البنية** **اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.**

**13.** المركز يقع عند نقطة الأصل، نصف القطر يساوي 4

**14.** المركز يقع عند النقطة (1 ,6)، نصف القطر يساوي 7

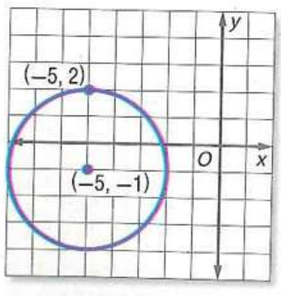
**15.** المركز يقع عند النقطة (0 ,2−)، القطر يساوي 16

**16.** المركز يقع عند النقطة (9− ,8)، نصف القطر يساوي $\sqrt{11}$

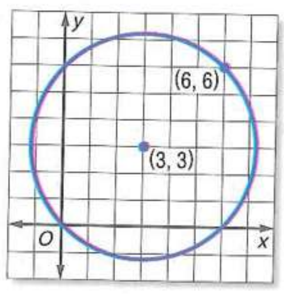
**17.** المركز يقع عند النقطة (6 ,3−)، تمر الدائرة بالنقطة (0, 6)

**18.** المركز يقع عند النقطة (2− ,1)، الدائرة تمر بالنقطة (3, −4)

**19.**




**20.**




**21. الطقس** تظهر شاشة رادار دوبلر حلقاتٍ متحدة المركز حول إحدى العواصف. فإذا كان مركز شاشة الرادار عند نقطة الأصل وكان بعد كل حلقة عن المركز يزيد عن سابقتها بمقدار 15 km، فما هي معادلة الحلقة الثالثة؟

**22. البستنة** يسقي مرشّ مساحةً دائريةً قطرها 10 m بالماء. يتوضع الرشّاش على بعد 20 m شمال المنزل. فإذا كان المنزل يقع عند نقطة الأصل، فما هي معادلة دائرة المساحة التي يسقيها المرشّ بالماء؟

مثال 3 **لكل دائرةٍ معادلتها معطاة، اذكر إحداثيي المركز وقياس نصف القطر. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

23. $x^2 + y^2 = 36$

24. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -1$

25. $x^2 + y^2 + 8x - 4y = -4$

26. $x^2 + y^2 - 16x = 0$

مثال 4 **اكتب معادلةً للدائرة التي تضم كل مجموعة من النقاط التالية. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.**

27. A (1, 6), B (5, 6), C (5, 0)

28. F (3, -3), G (3, 1), $H$ (7, 1)

مثال 5 **جـد نقطة (نقاط) التقاطع، في حال وجودها، بين كل دائرة ومستقيم لهما المعادلات التالية.**

29. $x^2 + y^2 = 5$
$y = \frac{1}{2}x$

30. $x^2 + y^2 = 2$
$y = -x + 2$

31. $x^2 + (y + 2)^2 = 8$
$y = x - 2$

32. $(x + 3)^2 + y^2 = 25$
$y = -3x$

33. $x^2 + y^2 = 5$
$y = 3x$

34. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$
$y = -x$

**اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.**

35. دائرة تقع النقطتان الطرفيتان لقطرها عند (4 ,0) و (4−, 6)

36. دائرة فيها $d = 22$ ومركزها مزاح مسافة 13 وحدة إلى يسار نقطة الأصل و 6 وحدات فوقها.

37. **تمثيل النماذج** تطلق محركاتٌ مختلفة الأحجام نماذج صواريخ إلى ارتفاعاتٍ مختلفة. وكلما ازداد الارتفاع الذي يبلغه الصاروخ، كَبُرت الدائرة المحتملة لسقوطه. وفي الشروط العادية للرياح، نصف قطر دائرة السقوط يساوي ثلاثة أمثال الارتفاع الذي يبلغه الصاروخ.

a. اكتب معادلة دائرة سقوط صاروخٍ يقطع مسافة 300 m في الهواء.

b. كم سيساوي نصف قطر دائرة سقوط صاروخٍ يقطع مسافة 1000 ft في الهواء؟ افترض أن مركز الدائرة يقع عند نقطة الأصل.

38. **القفز بالمظلات** تقع الإحداثيات الخاصة بهواة القفز الثلاثة بالمظلات الذين يستعرضون تشكيلاً دائريًا كما هو موضحٌ في الشكل عند النقاط التقريبية G (13, −2) و $H$ (−1, −2) و J (6, −9).

a. ما هي الإحداثيات التقريبية لهاوي القفز الموجود في المركز؟

b. إذا كانت كل وحدة تمثل مترًا واحدًا، فما هو قطر التشكيل الذي يصنعه هواة القفز؟

39. **توصيل الطلبات** يقدّم مطعم الأصدقاء للبيتزا خدمة التوصيل المجانية ضمن مسافة 6 km من المطعم. يقع المطعم على بعد 4 km غربًا من منزل ميساء و 5 km شمالاً من منزلها.

a. اكتب معادلةً ومثّلها بيانيًا لتمثيل هذه الحالة إذا كان موقع المنزل عند نقطة الأصل في النظام الإحداثي.

b. هل ستحظى ميساء بتوصيلٍ مجانيٍ إذا طلبت وجبة بيتزا من مطعم الأصدقاء؟ اشرح.

40. **نقاط تقاطع الدوائر** مثل بيانيًا $x^2 + y^2 = 4$ و $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ على المستوى الإحداثي نفسه.

a. قدّر نقطة (نقاط) التقاطع بين الدائرتين.

b. حُلّ المعادلة $x^2 + y^2 = 4$ لإيجاد قيمة $y$.

c. عوّض القيمة التي توصلت إليها في الجزء b في $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ وحُلّ لإيجاد $x$.

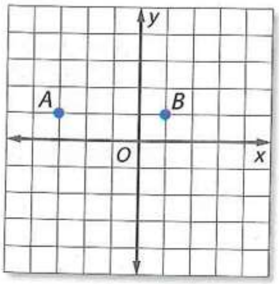
d. عوّض القيمة التي توصلت إليها في الجزء c في $x^2 + y^2 = 4$ وحُلَّ لإيجاد $y$.

e. استخدم إجابتيك عن الجزأين c و d لكتابة إحداثيات نقاط التقاطع. قارن هذه الإحداثيات مع تقديرك في الجزء a.

f. تحقق من أن النقطة (النقاط) التي توصلت إليها في الجزء d تقع على كلتي الدائرتين.

**41** برهن أو انقض الفرض القائل إنّ النقطة $(1, 2\sqrt{2})$ تقع على محيط دائرةٍ يوجد مركزها عند نقطة الأصل وتضم النقطة $(0, -3)$.

**42.** **التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المسألة محلاً هندسيًا مركبًا لزوجٍ من النقاط. يحقق **المحل الهندسي المركب** أكثر من مجموعةٍ متمايزةٍ واحدةٍ من الشروط.




**a.** **جدوليّ** اختر نقطتين A و B في المستوى الإحداثي. حدّد مواضع 5 إحداثياتٍ في المحل الهندسي لنقاطٍ متساوية البعد عن A و B.

**b.** **بيانيًا** مثّل المحلّ الهندسي نفسه للنقاط باستخدام تمثيلٍ بياني.

**c.** **لفظيًا** صِفّ المحل الهندسي لجميع النقاط متساوية البعد عن زوجٍ من النقاط.

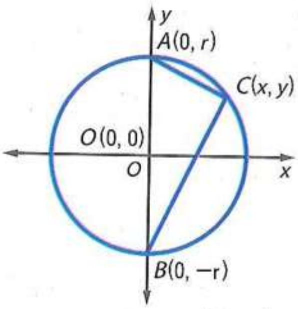
**d.** **بيانيًا** باستخدام تمثيلك البياني في الجزء b، حدّد الموضع الهندسي لجميع النقاط في المستوى والتي تبعد المسافة AB عن B ومثّله بيانيًا.

**e.** **لفظيًا** صِف الموضع الهندسي لجميع نقاط مستوىً والتي تبعد مسافةً واحدةً عن نقطةٍ واحدة. ثم صِف المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد مسافةً واحدةً عن A و B والتي تبعد المسافة AB عن B في الوقت نفسه. صِف التمثيل البياني للموضع الهندسي المركب.

**43.** يقع مركز دائرةٍ قطرها 12 في الربع الثاني. المستقيمان $y = -4$ و $x = 1$ مماسيان مع الدائرة. اكتب معادلةً للدائرة.

## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

**44.** **التحدي** اكتب برهانًا إحداثيًا لتثبت أنه إذا تقاطعت زاويةٌ محيطيةٌ مع قطر دائرةٍ وفق ما هو موضح، فإن الزاوية المتشكلة زاوية قائمة.




**45.** **التدبير** لديك دائرة معادلتها $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 16$.
إذا أزيح مركز الدائرة مسافة 3 وحدات إلى الجهة اليمنى و 9 وحدات إلى أعلى، فماذا ستكون معادلة الدائرة الجديدة؟ اشرح استنتاجك. انظر الهامش.

**46.** **مسألة غير محددة الإجابة** مثّل ثلاث نقاطٍ لا تقع على استقامةٍ واحدةٍ بيانيًا وصِل بينها لتشكّل مثلثًا. ثم أنشئ دائرةً تحيط بذلك المثلث.

**47.** **الكتابة في الرياضيات** افتتحت سبع محطاتٍ إذاعيةٍ جديدةٍ يتعيّن تخصيص ترددات بثٍ لها. تقع المحطات عند النقاط $A(9, 2)$ و $B(8, 4)$ و $C(8, 1)$ و $D(6, 3)$ و $E(4, 0)$ و $F(3, 6)$ و $G(4, 5)$، حيث إن الوحدة = 50 km.

**a.** فإذا كان يمكن تخصيص التردد نفسه للمحطات التي تبعد عن بعضها مسافةً أكثر من 200 km، فما هو العدد الأدنى من الترددات الذي يمكن تخصيصه لهذه المحطات جميعًا؟

**b.** صِف طريقتين مختلفتين للشروع في حل هذه المسألة.

**c.** اختر طريقةً وحُلَّ المسألة واشرح استنتاجك.

**التحدي** جــد إحداثيي النقطة $P$ على $\overrightarrow{AB}$ والتي تقسم القطعة المستقيمة وفق النسبة المعطاة لـ $AP$ إلى $PB$.

**48.** $A(0, 0)$، $B(3, 4)$، 2 إلى 3

**49.** $A(0, 0)$، $B(-8, 6)$، 4 إلى 1

**50.** **الكتابة في الرياضيات** صِف كيف تتغير معادلة دائرةٍ إذا أزيحت الدائرة مسافة a وحدات إلى الجهة اليمنى و b وحدات إلى الأسفل.

## تدريب على الاختبار المعياري

**.51** أي مما يلي يمثل معادلة الدائرة التي مركزها (5 ,6) والمارة بالنقطة (8 ,2)؟

**A** $(x-6)^2+(y-5)^2=5^2$
**B** $(x-5)^2+(y-6)^2=7^2$
**C** $(x+6)^2+(y+5)^2=5^2$
**D** $(x-2)^2+(y-8)^2=7^2$

**.52 جبريًا** ما هي حلول $n^2-4n=21$ ؟

**F** 3, 7    **H** −3, 7
**G** 3, −7    **J** −3, −7

**.53 إجابة قصيرة** حُلَّ: $5(x-4)=16$.

الخطوة 1: $5x-4=16$
الخطوة 2: $5x=20$
الخطوة 3: $x=4$

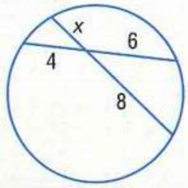
ما الخطوة الأولى الخاطئة في الحل المبيّن أعلاه؟

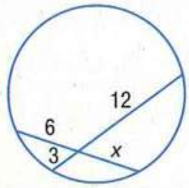
**SAT/ACT .54** يقع مركز الدائرة ⊙F عند النقطة (0 ,4−) ولهذه الدائرة نصف القطر 4. فما النقطة التي تقع على محيط الدائرة ⊙F؟

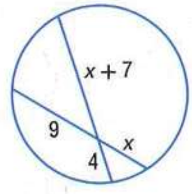
**A** (4, 0)    **D** (−4, 4)
**B** (0, 4)    **E** (0, 8)
**C** (4, 3)

## مراجعة شاملة

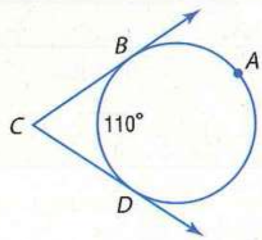
**جـد قيمة x.** (الدرس 7-6)

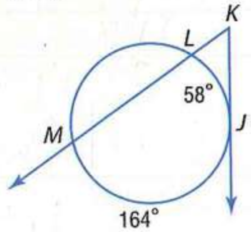
**55.**


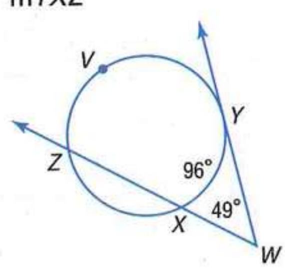

**56.**



**57.**



**جـد كل قياس مما يلي.** (الدرس 6-6)

**58.** $m\angle C$


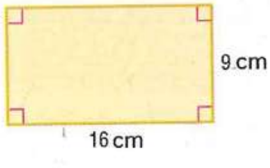

**59.** $m\angle K$


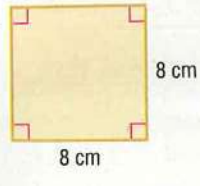

**60.** $m\widehat{YXZ}$


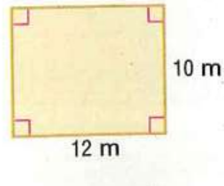

**.61 الطرقات** يضمّ الحيّ الذي يقطنه أيوب دواراتٍ عند نقاط التقاء شوارع محددة. فإذا أكمل أيوب بدراجته دورةً واحدةً على حافّة الدائرة المعشّبة بالضبط، فكم عدد الأمتار التي يكون قد قطعها؟ (الدرس 1-6)


## مراجعة المهارات

**جـد محيط كل شكلٍ ومساحته.**

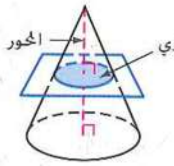
**62.**



**63.**



**64.**


# مختبر الهندسة
# القطوع المكافئة

التوسّع 6-8




الدائرة هي قطعٌ عرضيٌ لمخروطٍ دائري قائم. وتدعى هذه المقاطع العرضية **القطوع المخروطية** أو **المخروطيات**. يتشكّل القطع العرضي الدائري من خلال تقاطع مخروطٍ مع مستوىً عمودي على محور المخروط. ويمكنك إيجاد مقاطع مخروطيةٍ أخرى باستخدام نماذج ملموسةٍ لمخاريط.

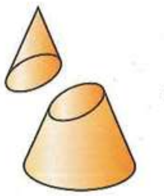
## النشاط 1 تقاطع مخروط مع مستوى

**مثّل تقاطع مخروطٍ ومستوىً يقع عند زاويةٍ ما بالنسبة لمحور المخروط ولكنه لا يمر بقاعدته.**

**الخطوة 1** املأ كوبًا مخروطيًا ورقيًا بمركبٍ للتشكيل. ثمّ انزع الكوب.

**الخطوة 2** اسحب خيطًا لتنظيف الأسنان عبر المخروط بزاويةٍ ما بالنسبة لمحور المخروط بحيث لا يمرّ بقاعدته.

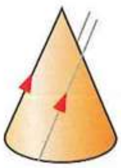
**الخطوة 3** أبعد قطعتي المخروط بعضهما عن بعضٍ وارسم المقطع العرضي تتبعيًا على ورقتك.



### تمثيل النماذج والتحليل

1. يدعى المقطع المخروطي في النشاط 1 بالقطع الناقص. ما شكل القطع الناقص؟

2. كرر النشاط 1، بحيث تسحب خيط تنظيفٍ للأسنان عبر النموذج باتجاهٍ موازٍ لمستقيمٍ تخيليٍ على جانب المخروط وعبر قاعدته. صِف الشكل الناتج.



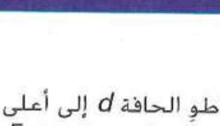
يطلق على القطع المخروطي الذي توصلت إليه في التمرين 2 اسم **القطع المكافئ** وفي الجبر 1، عرّفنا القطع المكافئ على أنه شكل التمثيل البياني لدالةٍ تربيعيةٍ مثل $y = x^2$. كما الدائرة وجميع المخاريط، يمكن تعريف القطع المكافئ أيضًا على أنه المحلّ الهندسي لنقاط. ويمكنك استكشاف تعريف المحلّات الهندسية للقطوع المكافئة باستخدام مطوياتٍ ورقية.

## النشاط 2 شكل القطع المكافئ

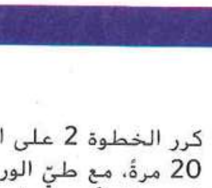
**استخدم المطويات الورقية للتمثيل التقريبي لقطعٍ مكافئ.**

**الخطوة 1** حدّد الحافّة السفلية لقطعةٍ مستطيلةٍ من ورق الشمع وسمّها $d$. ثمّ سمِّ نقطة $F$ في مركز الورقة.


**الخطوة 2** اطوِ الحافة $d$ إلى أعلى بحيث تلامس النقطة $F$. شكّل طيةً حادّة. ثم افتح الورقة وسوّها لتصبح ممهّدة.




**الخطوة 3** كرر الخطوة 2 على الأقل 20 مرةً، مع طيّ الورقة إلى نقطةٍ أخرى على الحافة $d$ كل مرة. ثمّ ارسم المنحنى المتشكل تتبعيًا.



## تمثيل النماذج والتحليل

**3.** سمِّ نقطة $P$ على القطع المكافئ وارسم $\overline{PF}$. ثم استخدم منقلةً لإيجاد نقطةٍ $D$ على المستقيم $d$ بحيث يكون $\overline{PD} \perp d$. صِف العلاقة القائمة بين $\overline{PF}$ و $\overline{PD}$.

**كرر النشاط 2، مع عَمَل التغيير المحدد على قطعةٍ جديدةٍ من ورق الشمع. وصِف الأثر على القطع المكافئ المتشكل.**

**4.** ضع المستقيم $d$ على طول الحافة فوق النقطة $F$.

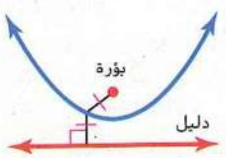
**5.** وضع المستقيم $d$ على طول الحافة الموجودة إلى يمين النقطة $F$.

**6.** ضع المستقيم $d$ على طول الحافة الموجودة إلى يسار النقطة $F$.

**7.** وقرّب النقطة $F$ إلى المستقيم $d$.

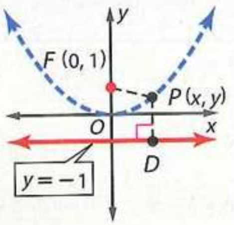
**8.** أبعد النقطة $F$ عن المستقيم $d$.

القطع المكافئ من الناحية الهندسية هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى متساوية البعد عن نقطةٍ ثابتةٍ تدعى **البؤرة** وعن مستقيمٍ ثابتٍ يدعى **الدليل**. تذكّر أن المسافة بين نقطةٍ ثابتةٍ ومستقيم هي طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم والمارة بتلك النقطة. ويمكنك إيجاد معادلة قطعٍ مكافئٍ على المستوى الإحداثي باستخدام تعريف محلّها الهندسي وقانون المسافة.




### النشاط 3 معادلة القطع المكافئ

**جـد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة (0, 1) ومعادلة دليله هي $y = -1$.**




**الخطوة 1** مثّل $F(0, 1)$ و $y = -1$ بيانيًا. وارسم منحنيًا بشكل الحرف $U$ للقطع المكافئ الواقع بين النقطة والمستقيم وفق ما هو موضّح. سمّ نقطةً $P(x, y)$ على المنحنى.

**الخطوة 2** سَمِّ نقطةً $D$ على $y = -1$ بحيث تكون القطعة المستقيمة $\overline{PD}$ عموديةً على المستقيم $y = -1$. ولذلك يجب أن يكون إحداثيا هذه النقطة هما $D(x, -1)$.

**الخطوة 3** استخدم قانون المسافة لإيجاد $PD$ و$PF$.

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} \qquad D(x, -1),\ P(x, y),\ F(0, 1) \qquad PD = \sqrt{(x-x)^2 + [y-(-1)]^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \qquad \text{بسّط.} \qquad = \sqrt{(y+1)^2}$$

**الخطوة 4** بما أن $PF = PD$، فضع التعبيرين متساويين فيما بينهما.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{(y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ | $PD = PF$ |
| $(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$ | بتربيع كل طرف. |
| $y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1$ | بتربيع كل ثنائية حدّ. |
| $4y = x^2$ أو $y = \frac{1}{4}x^2$ | بطرح $y^2 - 2y + 1$ من كل طرف. |

معادلة قطع مكافئ تقع بؤرته النقطة (0, 1) ومعادلة دليله $y = -1$ هو $y = \frac{1}{4}x^2$.

## النموذج والتحليل

**جـد معادلةً للقطع المكافئ المُعطى بؤرته ومعادلة دليله.**

**9.** $(0, -2),\ y = 2$ **10.** $\left(0, \frac{1}{2}\right),\ y = -\frac{1}{2}$ **11.** $(1, 0),\ x = -1$ **12.** $(-3, 0),\ x = 3$

**يمكن أن يقطع المستقيمُ قطعًا مكافئًا في نقطةٍ واحدةٍ أو نقطتين أو ألا يقطعه في أي نقطة. جـد نقطة (نقاط) التقاطع، في حال وجود أيٍّ منها، لكل قطعٍ مكافئٍ ومستقيمٍ أعطيت معادلتاهما في ما يلي.**

**13.** $y = x^2,\ y = x + 2$ **14.** $y = 2x^2,\ y = 4x - 2$ **15.** $y = -3x^2,\ y = 6x$ **16.** $y = -(x+1)^2,\ y = -x$

الدرس 6-9

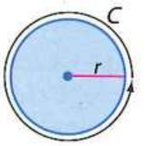
# مساحة الدائرة والقطاع الدائري

| السابق | الحالي | لماذا؟ |
|---|---|---|
| ● لقد وجـدت محيط دائرة. | 1 إيجاد مساحة الدائرة<br>2 إيجاد مساحة القطاع الدائري | ● لتحديد ما إذا كانت رقاقة البيتزا متوسطة الحجم أو كبيرة الحجم أفضل قيمةً، فيمكنك مقارنة كلفة السنتيمتر المربع الواحد. قسّم كلفة كل رقاقة بيتزا على مساحتها. |

**المفردات الجديدة**
قطاع دائري
sector of a circle
قطعة دائرية
segment of a circle

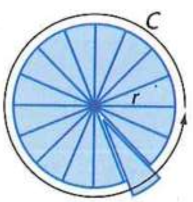
**ممارسات في الرياضيات**
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
مراعاة الدقة.

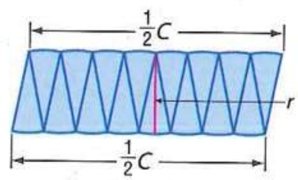
## 1 مساحة الدائرة




**مساحة الدائرة** تعلمت في دروس سابقة أن قانون محيط دائرة C قطرها $r$ يعطى بالعلاقة $C = 2\pi r$. يمكنك استخدام هذا القانون لتطوير قانونٍ لإيجاد مساحة دائرة.

قُسمت الدائرة المبينة أدناه، والتي نصف قطرها $r$ ومحيطها C إلى قطعٍ متطابقة، ثم أعيد ترتيبها لتشكيل شكلٍ يشبه متوازي أضلاع.



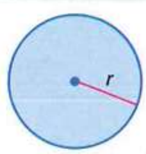




مع زيادة عدد القطع المتطابقة، يصبح الشكل معاد الترتيب أقرب إلى متوازي أضلاع. وقاعدة متوازي الأضلاع هي $\frac{1}{2}C$ وارتفاعه هو $r$، إذًا فمساحته هي $\frac{1}{2}C \cdot r$ بما أن $C = 2\pi r$، فإن مساحة متوازي الأضلاع هي أيضًا $\frac{1}{2}(2\pi r)r$ أو $\pi r^2$.

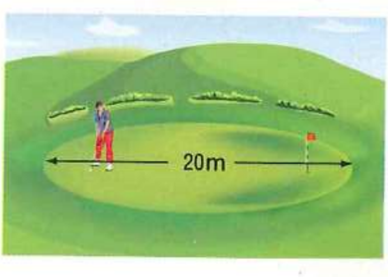
### المفهوم الأساسي مساحة الدائرة

**الشرح** إن مساحة الدائرة $A$ تساوي π مضروبةً بمربع نصف القطر $r$.

**الرموز** $A = \pi r^2$




### مثال 1 من الحياة اليومية مساحة الدائرة




**الرياضة ما هي مساحة الرقعة الخضراء الدائرية الموضحة مقربةً إلى أقرب مترٍ مربع؟**

القطر يساوي 20 m، إذًا فنصف القطر يساوي 10 m.

| | |
|---|---|
| $A = \pi r^2$ | مساحة الدائرة |
| $= \pi(10)^2$ | $r = 10$ |
| $\approx 314$ | باستخدام آلة حاسبة. |

إذًا، تبلغ المساحة حوالي $314\ m^2$.

**تمرين موجّه**

1. **الرياضة** نصف قطر الهدف في لعبة الرماية يساوي 12 cm. فما مساحة الهدف مقربةً إلى أقرب سنتيمترٍ مربع؟

## مثال 2 استخدام مساحة الدائرة لإيجاد قياسٍ مجهول

**الجبر** جــد نصف قطر دائرةٍ مساحتها $95\ cm^2$.

| | |
|---|---|
| $A = \pi r^2$ | مساحة الدائرة |
| $95 = \pi r^2$ | $A = 95$ |
| $\frac{95}{\pi} = r^2$ | بقسمة كل طرف على $\pi$. |
| $5.5 \approx r$ | باستخدام الآلة الحاسبة، وبأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف. |

نصف قطر الدائرة يساوي حوالي $5.5\ cm$.

### تمرين موجّه

**2. جبريًا** مساحة دائرةٍ $196\pi\ yd^2$. جــد قطرها.

**مراجعة المفردات**

**الزاوية المركزية** هي زاويةٌ لها رأس يقع في مركز الدائرة وضلعان يضمان نصفي قطرين في الدائرة

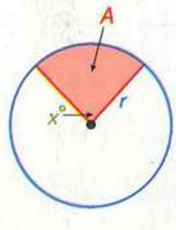
**القوس** هو جزءٌ من محيط دائرةٍ محدّدٌ بنقطتين

## 2 مساحات القطاع الدائري

إن الشريحة المأخوذة من رقاقة بيتزا دائرية مثالٌ عن قطاع في دائرة. و **قطاع الدائرة** هو منطقةٌ من الدائرةِ تحدّها زاويةٌ مركزية وقوسٌ محصورٌ أكبر أو أصغر. ويشبه قانون حساب مساحة القطاع قانون حساب طول القوس.

### المفهوم الأساسي مساحة قطاع

تساوي نسبة **المساحة A لقطاعٍ** إلى **مساحة الدائرة بكاملها** $\pi r^2$ نسبة **قياس القوس المحصور x** بالدرجات إلى 360.




**التناسب:** $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{x}{360}$

**المعادلة:** $A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$

## مثال من الحياة اليومية 3 مساحة قطاع

**البيتزا** تقطع رقاقة بيتزا دائرية قطرها يساوي $12\ cm$ إلى 8 شرائح متطابقة. فما هي مساحة الشريحة الواحدة مقربةً إلى أقرب جزءٍ من مئة؟

**الخطوة 1** جــد قياس قوس شريحة البيتزا.

بما أن رقاقة البيتزا مقسمةٌ بالتساوي إلى 8 شرائح، فإن قياس القوس لكل شريحة يساوي $360 \div 8$ أو 45.

**الخطوة 2** جــد نصف قطر رقاقة البيتزا. واستخدم هذا القياس لإيجاد مساحة القطاع، أو الشريحة.

القطر يساوي $12\ cm$. إذًا فنصف القطر يساوي $6\ cm$.

| | |
|---|---|
| $A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$ | مساحة القطاع |
| $= \frac{45}{360} \cdot \pi (6)^2$ | $x = 45$ و $r = 6$ |
| $\approx 14.14$ | استخدم آلة حاسبة. |

إذًا، فمساحة شريحة هذه البيتزا تساوي تقريبًا $14.14\ cm^2$.

**الربط بالحياة اليومية**

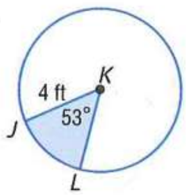
تباع حوالي 3 مليارات رقاقة بيتزا كل عام في الولايات المتحدة الأمريكية. ويكافئ ذلك حوالي 46 شريحة للشخص الواحد سنويًا.

**المصدر:** موقع مكتبة ثينك كويست

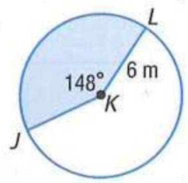
تمرين موجّه

**جــد مساحة القطاع المظلل. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة .**

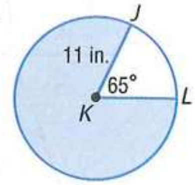
**3A.**




**3B.**




**3C.**




**3D.** **حِرَف** تعدّ عجلة الألوان المبينة على الجهة اليمنى وسيلةً يستخدمها الفنانون لتنظيم أنظمة الألوان. فإذا كان قطر عجلة الألوان 10 cm وكان كلٌّ من المقاطع الــ 12 مطابقًا للبقية، جــد المساحة التقريبية التي تغطيها درجات اللون الأخضر.


## التحقق من فهمك

**مثال 1** **الإنشاء** **جــد مساحة كل دائرة مما يلي وقرّبها إلى أقرب جزء من عشرة .**

**1.**


**2.**

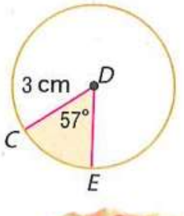

**مثال 2** **جــد القياس المحدّد وقرّبه إلى أقرب جزء من عشرة .**

**3** جــد قطر دائرةٍ مساحتها $74\ mm^2$.

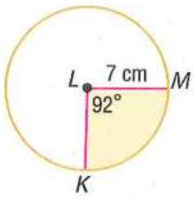
**4.** تساوي مساحة دائرةٍ $88\ cm^2$. جــد نصف قطرها.

**مثال 3** **جــد مساحة كل قطاع مظلل وقربها إلى أقرب جزء من عشرة .**

**5.**




**6.**




**7.** **الخَبز** تخبز سها شطائر لحفل جمع التبرعات في مدرستها. وقد قسمت كل شطيرة قطرها 9 cm إلى 6 شرائح متساوية.

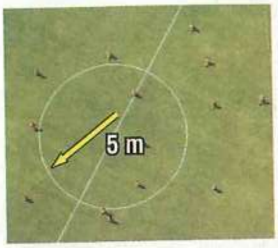
**a.** ما هي مساحة كل شريحة في الشطيرة بالسنتيمترات المربعة؟

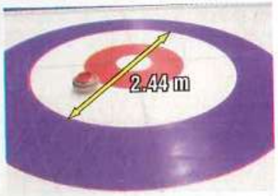
**b.** إذا كانت كلفة إعداد كل شريحة هي AED 0.25 وباعت 8 شطائر بسعر AED 1.25 للشريحة الواحدة، فما مبلغ المال الذي ستجمعه؟

## التمرين وحل المسائل

مثال 1 **تمثيل النماذج** جـد مساحة كل دائرة مما يلي وقربها إلى أقرب جزء من عشرة .

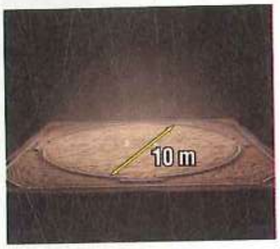
8. 


9. 


10. 


11. 


12. 


13. 


مثال 2 **جـد القياس المحدّد وقرّبه إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

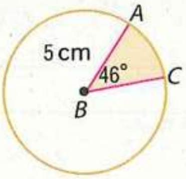
14. تساوي مساحة دائرةٍ $68\ cm^2$. جـد قطرها .

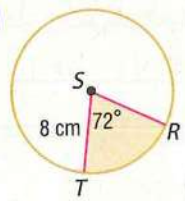
15. جـد قطر دائرةٍ مساحتها $94\ mm^2$.

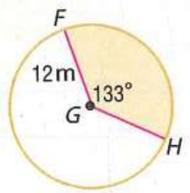
16. تساوي مساحة دائرةٍ $112\ cm^2$. جـد نصف قطرها.

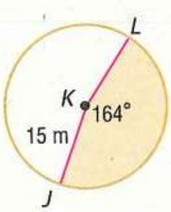
17. جـد نصف قطر دائرةٍ مساحتها $206\ m^2$.

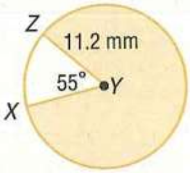
مثال 3 **جـد مساحة كل قطاع مظلل وقربها إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

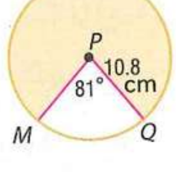
18. 


19. 


20. 


21. 


22. 


23. 


24. **الموسيقى** يوضح التمثيل البياني الدائري مدى تفضيل الطلاب للمواد الدراسية في إحدى المدارس. جـد مساحة كل قطاع وقياس كل قوسٍ محصورٍ بالدرجات إذا كان نصف قطر الدائرة يساوي وحدة واحدة. انظر الهامش.


25. **المجوهرات** يصنع صانعٌ للمجوهرات قِرطين بقصّ قطاعين بقياس $50°$ من قرصٍ من الفضة.


a. جـد مساحة كل قطاع.

b. إذا كان وزن قرص الفضة $2.3\ g$، كم مليجرامًا تزن شريحة الفضة المخصصة لصناعة كل قرط؟

**26. التخرج** يعرض الجدول نتائج استطلاع خضع له الطلاب لتحديد الموضوع المفضل بالنسبة إليهم لحفل التخرج.

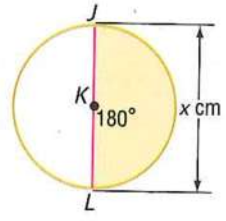
**a.** شكّل تمثيلاً بيانيًا دائريًا قطره سنتيمتران لتمثيل هذه البيانات.

**b.** جد مساحة كل قطاع لكل موضوع في تمثيلك البياني. وقرّب إلى أقرب جزءٍ من المئة من السنتيمتر.

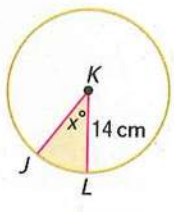
| الموضوع | النسبة المئوية |
|---|---|
| أمسية تحت النجوم | 11 |
| احتفال ثلاثاء المرافع | 32 |
| الربيع في باريس | 8 |
| الليل في ساحة التايمز | 47 |
| غير محدد | 2 |

**الاستنتاج المنطقي** **تعطى المساحة A لكل منطقة مظللة. جد قيمة x.**

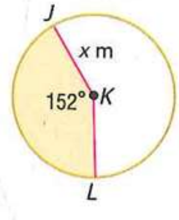
**27.** $A = 66\ cm^2$



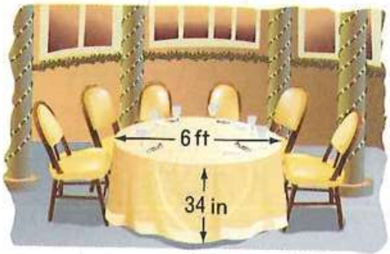

**28.** $A = 94\ cm^2$




**29.** $A = 128\ m^2$




**30. حِرَف** تصنع علياء أغطيةً للمائدة وفق الأبعاد المبينة من أجل إحدى الولائم. جد مساحة كل غطاءٍ بالأقدام المربعة إذا كان بالكاد يتعيّن على الغطاء أن يلمس الأرضية.



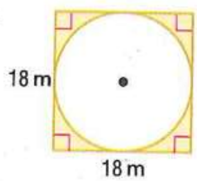

**31. الأشجار** يمكن تحديد عمر شجرةٍ حيةٍ عبر ضرب قطر الشجرة بعامل نموّها أو معدّل نموها.

**a.** ما نصف قطر شجرةٍ محيطها يساوي 1 m؟

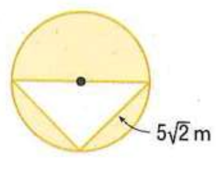
**b.** إذا كان عامل نمو الشجرة 4.5، فكم عمر الشجرة؟

**جـد مساحة المنطقة المظللة. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة .**

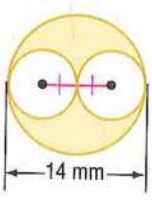
**32.**



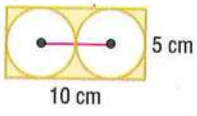

**33.**



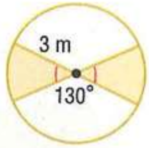

**34.**



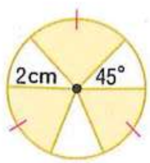

**35.**



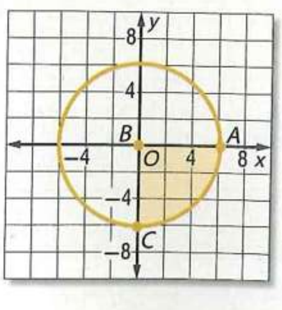

**36.**



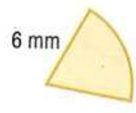

**37.**




**38. الهندسة الإحداثية** ما هي مساحة القطاع *ABC* الموضح على التمثيل البياني؟

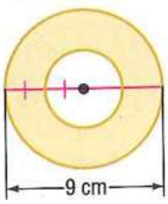



**39. جبريًا** الشكل الموضح أدناه هو قطاعٌ في دائرة. فإذا كان محيط الشكل 22 mm، جد مساحته بالمليمترات المربعة.

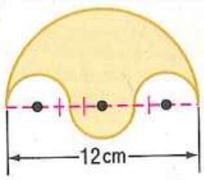


جـــد مساحة كل منطقة مظللة.

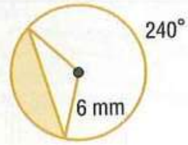
**40.**




**41**

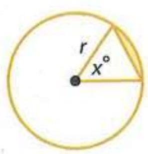



**42.**




**43.** **التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المسألة القطع الدائرية. **والقطعة الدائرية** هي المنطقة المحصورة بين قوسٍ ووتر في الدائرة.

**a.** **جبريًا** اكتب معادلةً لإيجاد المساحة A لقطعة دائرية في دائرة نصف قطرها $r$ وقياس زاويتها المركزية $x°$. (*تلميح:* استخدم الحساب المثلثي لإيجاد طول قاعدة المثلث وارتفاعه.)



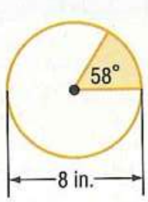

**b.** **جدوليّ** احسب وسجّل في جدولٍ عشر قيمٍ لـــ A تقابل قيم x تتراوح من 10 إلى 90 إذا كان $r$ يساوي 12 cm. قرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

**c.** **بيانيًا** مثّل البيانات الواردة في جدولك بيانيًا بحيث تضع قيم x على المحور الأفقي وقيم A على المحور الرأسي.

**d.** **تحليليًا** استخدم تمثيلك البياني للتنبؤ بقيمة A عند x تساوي 63. ثم استخدم الصيغة التي ولّدتها في الجزء a لحساب قيمة A عند x تساوي 63. ما وجه المقارنة بين القيمتين؟

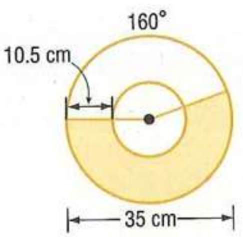
## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

**44.** **تحليل الأخطاء** تريد شيماء وعائشة إيجاد مساحة المنطقة المظللة في الدائرة الموضحة. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



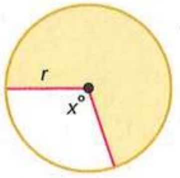

| شيماء | عائشة |
|---|---|
| $A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$ | $A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$ |
| $= \frac{58}{360} \cdot \pi(8)^2$ | $= \frac{58}{360} \cdot \pi(4)^2$ |
| $= 32.4\ cm^2$ | $= 8.1\ cm^2$ |

**45.** **التحدّي** جـــد مساحة المنطقة المظللة. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة .




**46.** **الفرضيات** عد إلى التمرين 43. هل مساحة قطّاع الدائرة أكبر من مساحة القطعة المناظرة له أحيانًا أم دائمًا أم ليست كذلك على الإطلاق؟

**47.** **الكتابة في الرياضيات** صِف طريقتين يمكنك استخدامهما لإيجاد مساحة المنطقة المظللة في الدائرة. وأي طريقةٍ أكثر كفاءةً برأيك؟ اشرح استنتاجك.

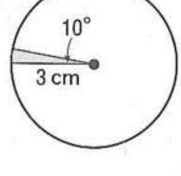



**48.** **التحدّي** اشتقّ القانون الخاص بإيجاد مساحة قطاعٍ من دائرةٍ باستخدام قانون طول القوس.

**49.** **الكتابة في الرياضيات** إذا تضاعف نصف قطر دائرة، فهل سيتضاعف قياس قطاعٍ في تلك الدائرة؟ وهل سيتضاعف إذا تضاعف قياس قوسٍ ذلك القطاع؟

## تدريب على الاختبار المعياري

**50.** ما هي مساحة القطاع؟




**A** $\frac{9\pi}{10}$ cm 2     **C** $\frac{\pi}{4}$ cm$^2$

**B** $\frac{3\pi}{5}$ cm 2     **D** $\frac{\pi}{6}$ cm$^2$

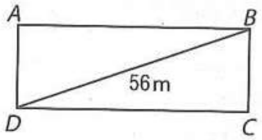
**51. إجابة قصيرة** $\overleftrightarrow{MN}$ و $\overleftrightarrow{PQ}$ تتقاطعان عند $T$. جـد قيمة $x$ التي تجعل $m\angle MTQ = 2x + 5$ و $m\angle PTM = x + 7$.
ما هما قياسا الزوايتين $\angle MTQ$ و $\angle PTM$ بالدرجات؟

**52. الجبر** لعب عامر 4 أشواطٍ في لعبة البولينغ، وسجّل وسطيًا 130 نقطة. ثم لعب شوطين آخرين وسجّل 180 و 230 نقطة. فكم كان عدد نقاطه الوسطية للأشواط الـ 6؟

**F** 90     **H** 180

**G** 155     **J** 185

**53. SAT/ACT** طول كل قطرٍ من قطري الشكل $ABCD$ يساوي 56 m.
فإذا كانت $m\angle BAC = 42°$.
فما هو طول $\overline{AB}$ مقربًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة من المتر؟




**A** 80.5     **D** 50.4

**B** 75.4     **E** 41.6

**C** 56.3

## مراجعة شاملة

**54. الطيران** تطير طائرةٌ نفاثةٌ باتجاه الشمال الشرقي، وتمثّل سرعتها المتّجهة بـ mph $\langle 450, -450\rangle$. تهبّ الرياح من الغرب، وتمثّل سرعتها بـ mph $\langle 100, 0\rangle$.

**a.** جـد متّجه المحصّلة للطائرة النفاثة بالصورة المركّبة.

**b.** جـد مقدار المحصّلة.

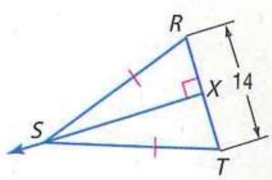
**c.** جـد اتجاه المحصلة.

**55. مدن الملاهي** ينظر راكبٌ من قمة قطارٍ للملاهي على بعد 60 yd فوق سطح الأرض إلى الأسفل ليرى دوامة الخيول والأرجوحة الدوارة. فإذا كانت زاويتا الانخفاض تساويان 11° و8° على الترتيب، فما هي المسافة الفاصلة بين دوامة الخيول والأرجوحة الدوارة؟

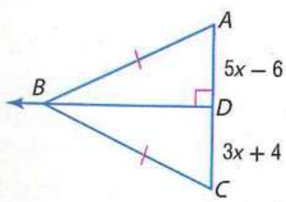
## مراجعة المهارات

**جـد قياس كل مما يلي.**

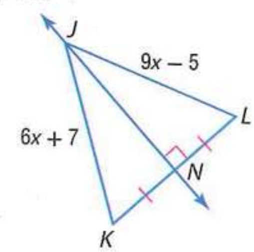
**56.** XT




**57.** AC




**58.** JK



# 6 دليل الدراسة والمراجعة

## دليل الدراسة

### المفاهيم الأساسية

**الدوائر والمحيط** (الدرس 1-6)

- محيط دائرة يساوي $\pi d$ أو $2\pi r$.

**الزوايا والأقواس والأوتار والزوايا المحيطية**
(الدروس 2-6 إلى 4-6)

- مجموع قياس الزوايا الداخلية في دائرة يساوي $360°$.
- يتناسب طول قوسٍ طول المحيط.
- تقطع الأقطار العمودية على الأوتار الأوتار والأقواس المحصورة.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره.

**القاطع والمماس وقياس الزوايا**
(الدرسان 5-6 و 6-6)

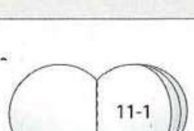
- يقطع المستقيم المماس لدائرة الدائرة في نقطةٍ واحدةٍ فقط وهو عموديٌّ على نصف قطرها.
- إن مماسي الدائرة المرسومين من نقطة خارجية واحدة متطابقان.
- قياس الزاوية التي يشكلها مستقيمان قاطعان يساوي نصف الفرق الموجب لقوسيها المحصورين.
- قياس الزاوية المتشكلة من قاطعٍ وخط مماسٍ يساوي نصف قوسها المحصور.

**القطع الخاصة ومعادلة الدائرة** (الدرسان 7-6 و 8-6)

- يمكن إيجاد طولي وترين متقاطعين في دائرة عبر استخدام نواتج ضرب قياس القطع.
- إن معادلة الدائرة التي مركزها $(h, k)$ ونصف قطرها $r$ هي $(x - h)^2 - (y - k)^2 = r^2$.

### المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.




### المفردات الأساسية

- الأقواس المتجاورة adjacent arcs
- القوس adjacent arcs
- طول القوس arc length
- المركز center
- الزاوية المركزية central angle
- الوتر chord
- قطعة الوتر chord segment
- دائرة circle
- محيط الدائرة circumference
- محيط circumscribed
- مماس مشترك common tangent
- المحل الهندسي المركب compound locus
- الدوائر متحدة المركز concentric circles
- الأقواس المتطابقة congruent arcs
- قطر الدائرة diameter
- قطعة القاطع الخارجي external secant segment
- محاط inscribed
- الزاوية المحيطية inscribed angle
- القوس المحصور intercepted arc
- القوس الأكبر major arc
- القوس الأصغر minor arc
- باي (π) pi
- نقطة التماس point of tangency
- نصف القطر radius
- القاطع secant
- قطعة القاطع secant segment
- نصف الدائرة semicircle
- ظل الزاوية tangent

### مراجعة المفردات

**حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط لجعل الجملة صحيحة.**

**1.** أي قطعةٍ مستقيمةٍ تقع نقطتاها الطرفيتان على الدائرة هي نصف قطر في الدائرة.

**2.** الوتر المار بمركز دائرةٍ هو قطرٌ فيها.

**3.** يقع رأس الزاوية المركزية في مركز الدائرة ويضم ضلعاها نصفي قطرٍ في الدائرة.

**4.** إن القوس الذي قياسه أقل من $180°$ هو قوسٌ أكبر.

**5.** القوس المحصور هو قوسٌ تقع نقطتاه الطرفيتان على ضلعي زاويةٍ محيطيةٍ ويقع بداخل الزاوية المحيطية.

**6.** المماس المشترك أي النقطة التي يقطع عندها مستقيمٌ يقع في المستوى نفسه مع دائرة تلك الدائرة.

**7.** القاطع مستقيمٌ يقطع دائرةً في نقطةٍ واحدةٍ فقط.

**8.** القاطع هو قطعة مستقيمة من نصف القطر تقع نقطةٌ واحدةٌ فيها فقط على محيط الدائرة.

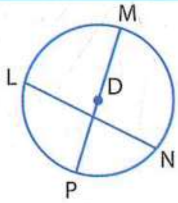
**9.** تكون دائرتان متحدتي المركز فقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.

# الوحدة 6 دليل الدراسة والمراجعة

## مراجعة درس بدرس

### 6-1 الدوائر والمحيط

**لحلّ التمارين 12-10، عد إلى الدائرة ⊙D.**




**10.** سَمِّ الدائرة

**11.** سَمِّ نصف قطر

**12.** سَمِّ وترًا ليس قطرًا في الدائرة.

**جـد قطر الدائرة ذات المحيط المعطى ونصف قطرها. وقرّب إلى أقرب مئة.**

**13.** $C = 43$ cm

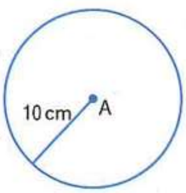
**14.** $C = 26.7$ m

**15.** $C = 108.5$ m

**16.** $C = 225.9$ mm

#### مثال 1

**جـد محيط الدائرة ⊙A.**



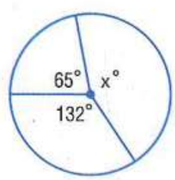

| | |
|---|---|
| $C = 2\pi r$ | قانون محيط الدائرة |
| $= 2\pi(10)$ | بالتعويض |
| $\approx 62.83$ | باستخدام آلة حاسبة. |

محيط الدائرة $\odot A$ يساوي حوالي 62.83 cm.

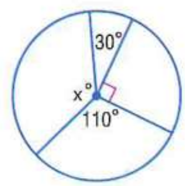
### 6-2 قياس الزوايا والأقواس

**جـد قيمة x.**

**17.**

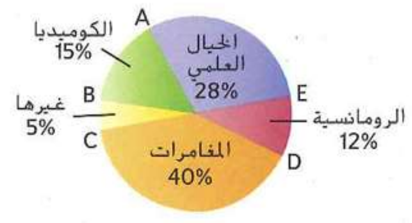



**18.**




**19.** **الأفلام** يمثل المخطط الدائري نتائج استطلاع أجرته لميس بشأن الأنواع المفضلة من الأفلام لدى الطلاب. جـد كلاً من القياسات.

الأنواع المفضلة من الأفلام لدى طلاب الآنسة لميس



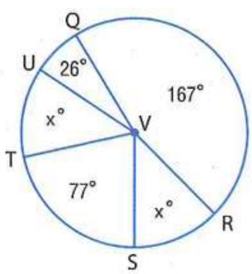

**a.** $m\widehat{AE}$

**b.** $m\widehat{BC}$

**c.** صِف نوع القوس الذي تمثله فئة المغامرات.

#### مثال 2

**جـد قيمة x.**

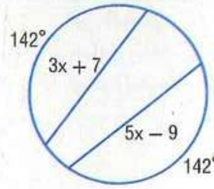



| | |
|---|---|
| $m\angle QVR + m\angle RVS + m\angle SVT + m\angle TVU + m\angle UVQ = 360$ | مجموع الزوايا المركزية |
| $167 + x + 77 + x + 26 = 360$ | بالتعويض |
| $270 + 2x = 360$ | بسّط |
| $2x = 90$ | اطرح |
| $x = 45$ | اقسم |

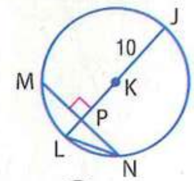
# دليل الدراسة والمراجعة تابع

## 6-3 الأقواس والأوتار

**20.** جـد قيمة $x$.




**في الدائرة $\odot K$، $MN = 16$، و $m\widehat{MN} = 98$. جـد كلاً من القياسات. وقرّب إلى أقرب جزء من مئة.**

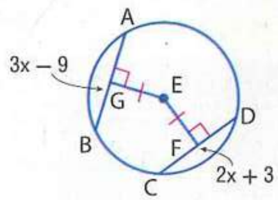



**21.** $m\widehat{NJ}$ **22.** $LN$

**23. البستنة** قمّة التعريشة الموضحة قوسٌ في دائرةٍ فيها $\overline{CD}$ جزء من القطر و $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. إذا كان $\widehat{ACB}$ يساوي حوالي 28% من دائرة كاملة، فما قياس $m\widehat{CB}$؟


### مثال 3

**جبريًا** في الدائرة $\odot E$، لدينا $EG = EF$. جـد $AB$.




بما أن الوترين $\overline{EG}$ و $\overline{EF}$ متطابقان، فهما متساويا البعد عن $E$. إذًا، $AB = CD$.

| | |
|---|---|
| $AB = CD$ | النظرية 6.5 |
| $3x - 9 = 2x + 3$ | بالتعويض |
| $3x = 2x + 12$ | اجمع |
| $x = 12$ | بسّط |

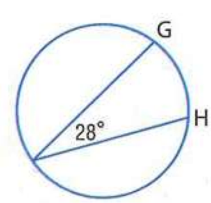
إذًا، $AB = 3(12) - 9$ أو 27.

## 6-4 الزوايا المحيطية

**جـد قياس كل مما يلي.**

**24.** $m\angle 1$

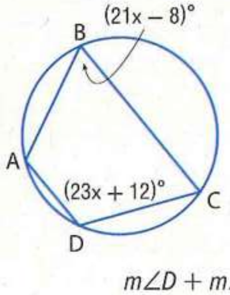

**25.** $m\widehat{GH}$




**26. التسويق** في الشعار المبيّن على الجهة اليسرى، $m\angle 1 = 42$. جـد $m\angle 5$.


### مثال 4

جـد $m\angle D$ و $m\angle B$.




بما أن $ABCD$ محاطٌ بدائرة، فكل زاويتين متقابلتين متكاملتان.

| | |
|---|---|
| $m\angle D + m\angle B = 180$ | تعريف الزوايا المتكاملة |
| $23x + 12 + 21x - 8 = 180$ | بالتعويض |
| $44x + 4 = 180$ | بسّط. |
| $44x = 176$ | اطرح. |
| $x = 4$ | اقسم. |

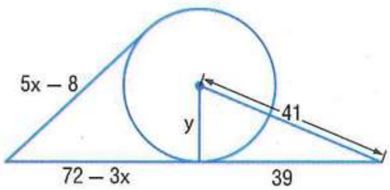
إذًا، $m\angle D = 23(4) + 12$ أو 104 و $m\angle B = 21(4) - 8$ أو 76.

# دليل الدراسة والمراجعة تابع

## 6-5 المماسات

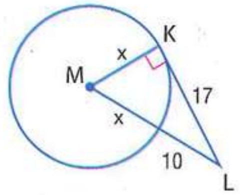
27. **الخيال العلمي** تقول قصةٌ يقرؤها حسّان إنه من الممكن السفر اللحظي بين كوكبٍ ثنائي الأبعاد وقمره عندما يتبع المسافر عبر الزمن مماسًا. انسخ الشكلين أدناه وارسم جميع مسارات السفر الممكنة.

28. جــد $x$ و $y$. افترض أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسية هي مماسية بالفعل. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.




### مثال 5

**في الشكل، $\overline{KL}$ مماس للدائرة $\odot M$ عند النقطة K. جــد قيمة x.**



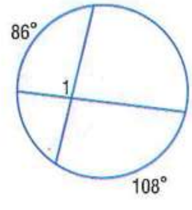

بموجب النظرية 6.10، فإن $\overline{KL} \perp \overline{MK}$. إذًا، فالمثلث $\triangle MKL$ قائم الزاوية.

| | |
|---|---|
| $KM^2 + KL^2 = ML^2$ | نظرية فيثاغورس |
| $x^2 + 17^2 = (x + 10)^2$ | بالتعويض |
| $x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$ | اضرب |
| $289 = 20x + 100$ | بسّط |
| $189 = 20x$ | اطرح |
| $9.45 = x$ | اقسم |

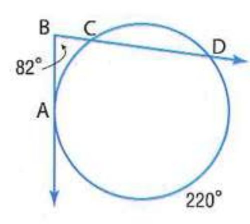
## 6-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا

**من أجل كل قياس، افترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.**

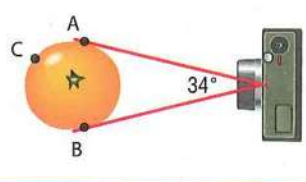
29. $m\angle 1$




30. $m\widehat{AC}$

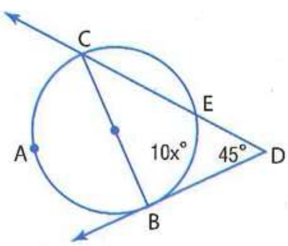



31. **التصوير** يحتاج أحمد إلى أخذ لقطةٍ قريبةٍ لبرتقالةٍ من أجل درس الفنون. حيث يلتقط صورةً للبرتقالة وفق ما هو موضحٌ أدناه، بحيث يشكّل الخطان البصريان مماسين مع البرتقالة. فإذا كان قياس زاوية العرض في آلة التصوير هو $34°$، فما قياس $m\widehat{ACB}$؟




### مثال 6

**جــد قيمة $x$.**




$\widehat{CAB}$ نصف دائرة لأن $\overline{CB}$ قطرٌ في الدائرة.

إذًا، $m\widehat{CAB} = 180$.

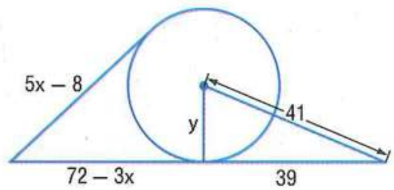
| | |
|---|---|
| $m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{CB} - m\widehat{EB})$ | النظرية 6.14 |
| $45 = \frac{1}{2}(180 - 10x)$ | بالتعويض |
| $90 = 180 - 10x$ | اضرب |
| $-90 = -10x$ | اطرح |
| $9 = x$ | اقسم |

# دليل الدراسة والمراجعة تابع

## 6-5 المماسات

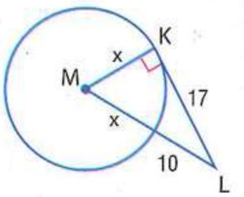
**27. الخيال العلمي** تقول قصةٌ يقرؤها حسّان إنه من الممكن السفر اللحظي بين كوكبٍ ثنائي الأبعاد وقمره عندما يتبع المسافر عبر الزمن مماسًا. انسخ الشكلين أدناه وارسم جميع مسارات السفر الممكنة.

**28.** جــد $x$ و $y$. افترض أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسية هي مماسية بالفعل. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.




**مثال 5**

**في الشكل، $\overline{KL}$ مماس للدائرة ⊙M عند النقطة K. جــد قيمة x.**



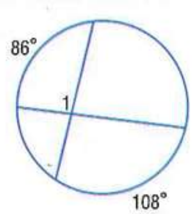

بموجب النظرية 6.10، فإن $\overline{KL} \perp \overline{MK}$. إذًا، فالمثلث $\triangle MKL$ قائم الزاوية.

| | |
|---|---|
| $KM^2 + KL^2 = ML^2$ | نظرية فيثاغورس |
| $x^2 + 17^2 = (x + 10)^2$ | بالتعويض |
| $x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$ | اضرب |
| $289 = 20x + 100$ | بسّط |
| $189 = 20x$ | اطرح |
| $9.45 = x$ | اقسم |

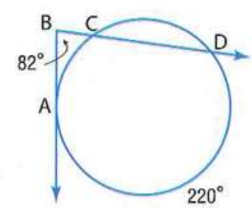
## 6-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا

**من أجل كل قياس، افترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.**

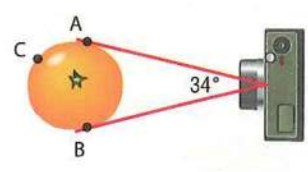
**29.** $m\angle 1$




**30.** $m\widehat{AC}$

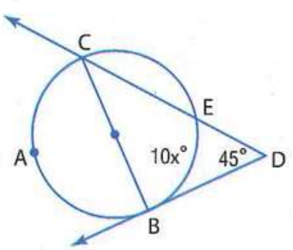



**31. التصوير** يحتاج أحمد إلى أخذ لقطةٍ قريبةٍ لبرتقالةٍ من أجل درس الفنون. حيث يلتقط صورةً للبرتقالة وفق ما هو موضحٌ أدناه، بحيث يشكّل الخطان البصريان مماسين مع البرتقالة. فإذا كان قياس زاوية العرض في آلة التصوير هو °34، فما قياس $m\widehat{ACB}$؟




**مثال 6**

**جــد قيمة $x$.**




$\widehat{CAB}$ نصف دائرة لأن $\overline{CB}$ قطرٌ في الدائرة.

إذًا، $m\widehat{CAB} = 180$.

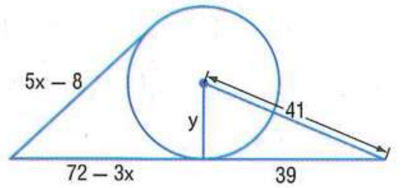
| | |
|---|---|
| $m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{CB} - m\widehat{EB})$ | النظرية 6.14 |
| $45 = \frac{1}{2}(180 - 10x)$ | بالتعويض |
| $90 = 180 - 10x$ | اضرب |
| $-90 = -10x$ | اطرح |
| $9 = x$ | اقسم |

# دليل الدراسة والمراجعة تابع

## 6-5 المماسات

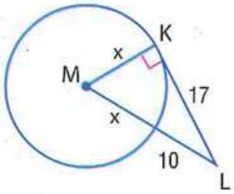
**27. الخيال العلمي** تقول قصةٌ يقرؤها حسّان إنه من الممكن السفر اللحظي بين كوكبٍ ثنائي الأبعاد وقمره عندما يتبع المسافر عبر الزمن مماسًا. انسخ الشكلين أدناه وارسم جميع مسارات السفر الممكنة.

**28.** جـد $x$ و $y$. افترض أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسية هي مماسية بالفعل. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.




### مثال 5

**في الشكل، $\overline{KL}$ مماس للدائرة $\odot M$ عند النقطة K. جـد قيمة x.**



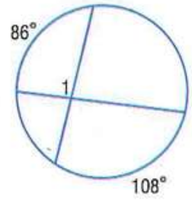

بموجب النظرية 6.10، فإن $\overline{KL} \perp \overline{MK}$. إذًا، فالمثلث $\triangle MKL$ قائم الزاوية.

| | |
|---|---|
| $KM^2 + KL^2 = ML^2$ | نظرية فيثاغورس |
| $x^2 + 17^2 = (x + 10)^2$ | بالتعويض |
| $x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$ | اضرب |
| $289 = 20x + 100$ | بسّط |
| $189 = 20x$ | اطرح |
| $9.45 = x$ | اقسم |

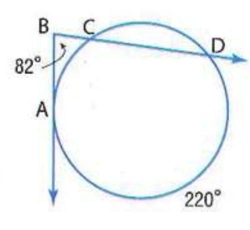
## 6-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا

**من أجل كل قياس، افترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.**

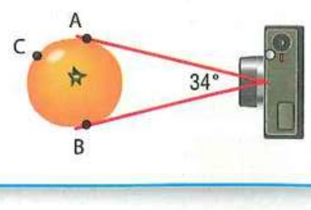
**29.** $m\angle 1$




**30.** $m\widehat{AC}$

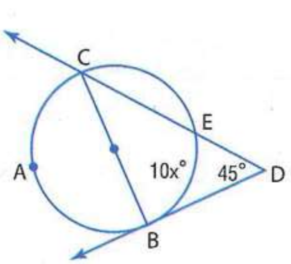



**31. التصوير** يحتاج أحمد إلى أخذ لقطةٍ قريبةٍ لبرتقالةٍ من أجل درس الفنون. حيث يلتقط صورةً للبرتقالة وفق ما هو موضحٌ أدناه، بحيث يشكّل الخطان البصريان مماسين مع البرتقالة. فإذا كان قياس زاوية العرض في آلة التصوير هو $34°$، فما قياس $m\widehat{ACB}$؟




### مثال 6

**جـد قيمة $x$.**




$\widehat{CAB}$ نصف دائرة لأن $\overline{CB}$ قطرٌ في الدائرة.

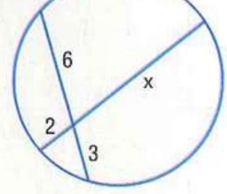
إذًا، $m\widehat{CAB} = 180$.

| | |
|---|---|
| $m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{CB} - m\widehat{EB})$ | النظرية 6.14 |
| $45 = \frac{1}{2}(180 - 10x)$ | بالتعويض |
| $90 = 180 - 10x$ | اضرب |
| $-90 = -10x$ | اطرح |
| $9 = x$ | اقسم |

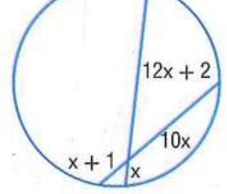
## 6-7 القطع الخاصة في دائرة

جـد قيمة $x$. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

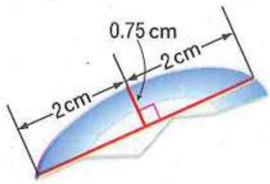
**32.**




**33.**

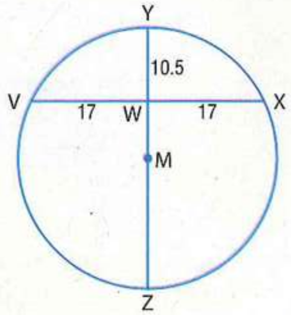



**34.** **علم الآثار** أثناء حفر حمد لحفرةٍ من أجل غرس شجرة، عثر على قطعةٍ من صحنٍ مكسور. كم كان محيط الصحن الأصلي؟ قرّب إلى أقرب جزءٍ من مئة.




### مثال 7

جـــد قطر الدائرة $M$.




| | |
|---|---|
| $VW \cdot WX = YW \cdot WZ$ | النظرية 6.15 |
| $17 \cdot 17 = 10.5 \cdot WZ$ | بالتعويض |
| $289 = 10.5 \cdot WZ$ | بسّط |
| $27.5 \approx WZ$ | بقسمة كل طرف على 10.5. |
| $YZ = YW + WZ$ | بموجب مسلّمة جمع القطع المستقيمة |
| $YZ = 10.5 + 27.5$ | بالتعويض |
| $YZ = 38$ | بسّط |

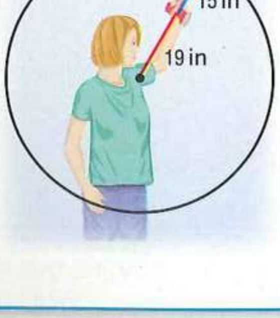
## 6-8 معادلة الدائرة

اكتب معادلة كل دائرة مما يلي.

**35.** يقع المركز عند النقطة $(-2, 4)$، نصف القطر يساوي 5

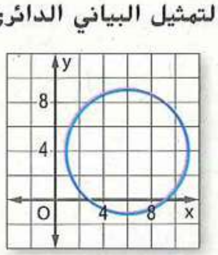
**36.** يقع المركز عند النقطة $(2, 1)$، قطر الدائرة يساوي 14

**37.** **الحطب** خلال حصة تدريبية خارجية، تتعلم بدرية فحصًا للسلامة في عملية تقطيع الحطب. وتتضمن الطريقة تشكيل دائرةٍ بمدّ ذراعها تتحقق من أنها لن تصدم أي شيءٍ فوقها أثناء التقطيع. فإذا كان امتداد ذراعها يساوي 19 in، وكان طول الفأس 15 in، وكان كتفها يقع عند نقطة الأصل، فما هي معادلة دائرة السلامة الخاصة ببدرية؟




### مثال 8

اكتب معادلة التمثيل البياني الدائري أدناه.




يقع المركز عند النقطة $(6, 4)$، ونصف القطر يساوي 5.

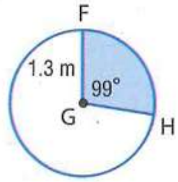
| | |
|---|---|
| $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ | معادلة الدائرة |
| $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ | $(h, k) = (6, 4)$ و $r = 5$ |
| $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$ | بسّط |

# دليل الدراسة والمراجعة تابع

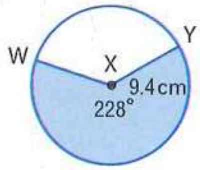
## 6-9 مساحة الدائرة والقطاع الدائري

جـــد مساحة كل قطاع مظلل وقربها إلى أقرب جزء من عشرة.

**.38**




**.39**




**.40** **الدراجات** تغطي زينة للدراجة $\frac{1}{9}$ من الدائرة التي تشكلها العجلة. فإذا كان قطر العجلة يساوي 26 cm، فما هي مساحة الزينة؟

**.41** **البيتزا** طلب حسام وحامد قطعة بيتزا دائرية بقطر 16 cm وقطّعاها إلى 12 شريحة.

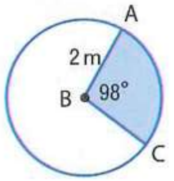
**a.** إذا أكل حامد 3 قطع، فما هي مساحة البيتزا التي تناولها؟

**b.** إذا أكل حميد قطعتين، فما مساحة البيتزا التي تناولها؟

**c.** ما مساحة ما تبقى من البيتزا؟

### مثال 9

جـــد مساحة القطاع المظلل. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة.




$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$ مساحة قطاع

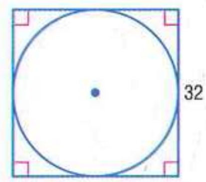
$= \frac{98}{360} \cdot \pi(2)^2$ بالتعويض

$\approx 3.4\ m^2$ بسّط

# الوحدة 6 تدريب على الاختبار

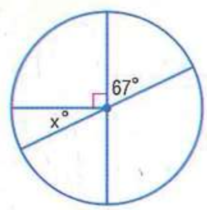
**1.** **برك السباحة** لدى عائلة أمل بركة سباحةٍ عمقها 1.3 m في فناء منزلهم الخلفي. فإذا كان قطر البركة 7.6 m، فما هو محيط البركة مقربًا إلى أقرب متر؟

**2.** جــد المحيط الدقيق للدائرة أدناه.

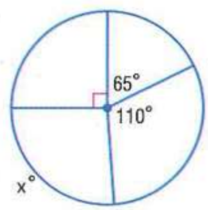



**جــد قيمة x.**

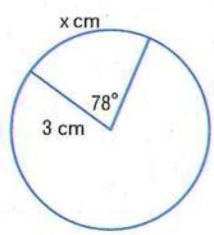
**3.**



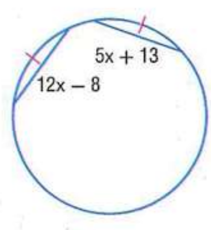

**4.**



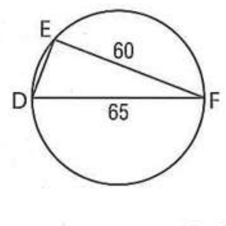

**5.**




**6.**



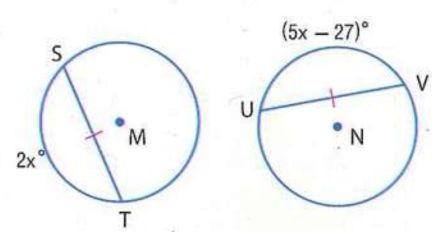

**7.** **الاختيار من متعدد** ما قياس $\widehat{ED}$؟




**A** 15 **C** 88.5

**B** 25 **D** المعلومات غير كافية

**8.** جــد x إذا كانت $\odot M \cong \odot N$.

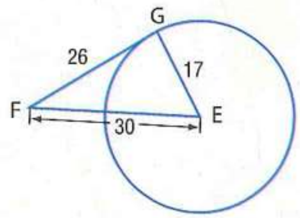



**9.** **الاختيار من متعدد** بكم نقطةً تشترك دائرتان متحدتا المركز؟

**F** 0 **H** 2

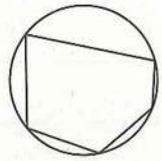
**G** 1 **J** عدد لا نهائي من النقاط

**10.** حدّد ما إذا كان $\overline{FG}$ مماسًا للدائرة $\odot E$. برر إجابتك.

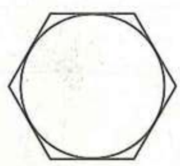



**11.** **الاختيار من متعدد** أي من الأشكال التالية يوضح مضلعًا محيطًا بدائرة؟

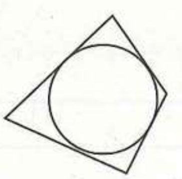
**A**



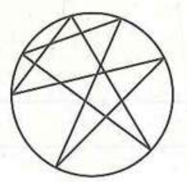
**C**

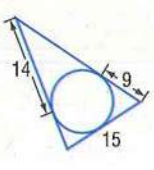


**B**



**D**

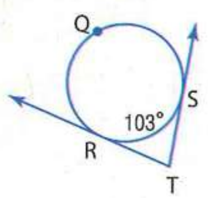




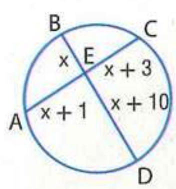

**12.** جــد محيط المثلث على الجهة اليسرى. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماسات بالفعل.

**جــد قياس كل مما يلي.**

**13.** $m\angle T$




**14.** $x$

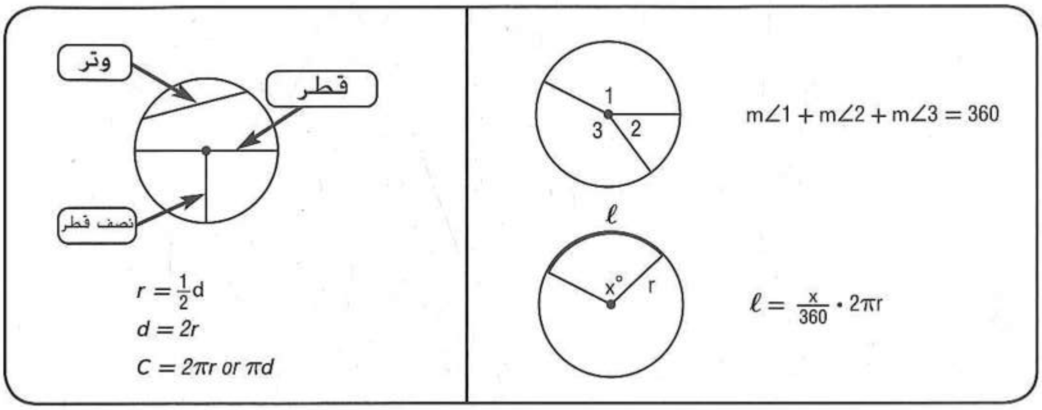



**15.** **الأزهار** تريد خولة إحاطة جذع شجرةٍ بحوضٍ للأزهار. فإذا كان مركز جذع الشجرة هو نقطة الأصل وإذا ما أرادت خولة توسيع الحوض 3 m بعيدًا عن مركز الشجرة، فما المعادلة التي ستمثّل حوض الأزهار؟

# التحضير للاختبارات المعيارية

## خواصّ الدوائر

الدائرة شكلٌ فريدٌ تملك فيه الزوايا والأقواس والقطع المتقاطعة مع الدائرة خواصّ وعلاقاتٍ مميزة. ويتعيّن عليك أن تتمتّع بالقدرة على تحديد أجزاء الدائرة وكتابة معادلتها وإيجاد قياس الأقواس والزوايا والقطع في الدائرة.




### إستراتيجيات تطبيق خواصّ الدوائر

**الخطوة 1**

راجع أجزاء الدائرة وعلاقاتها

- تتضمن بعض الأجزاء الرئيسة: **نصف القطر، القطر، القوس، الوتر، المماس، القاطع**
- ادرس النظريات والخواصّ الرئيسة للدوائر فضلاً عن العلاقات بين أجزاء الدائرة.

**الخطوة 2**

اقرأ عبارة المسألة وادرس أي شكلٍ يُعرض عليك بعناية.

- حدّد ما الذي يُطلب منك إيجاده.
- دون على الشكل أي معلوماتٍ بوسعك إضافتها.
- حدّد ما هي النظريات أو الخواصّ التي تنطبق على حالة المسألة.

**الخطوة 3**

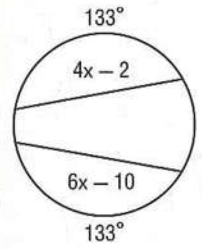
حُلّ المسألة والتحقق من حلّك.

- طبّق النظريات أو الخواصّ لحل المسألة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

## مثال على الاختبار المعياري

**اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.**

جـد قيمة $x$ في الشكل.




A 2
B 3
C 4
D 6

اقرأ عبارة المسألة وادرس الشكل بعناية. لديك دائرةٌ فيها وتران يقابلان قوسين أصغرين. تشير إحدى الخواصّ الهامة في الدائرة إلى أنه يتطابق وتران فقط إذا كان قوساهما الأصغران المقابلان متطابقين. يمكنك الاستفادة من هذه النظرية لترتيب المعادلة وحلّها لإيجاد قيمة $x$.

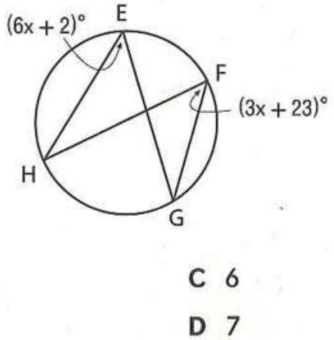
| | |
|---|---|
| $4x - 2 = 6x - 10$ | تعريف القطع المستقيمة المتطابقة |
| $4x - 6x = -10 + 2$ | اطرح |
| $-2x = -8$ | بسّط |
| $\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$ | بقسمة كل طرف على 2–. |
| $x = 4$ | بسّط |

إذًا فقيمة x تساوي 4. والإجابة هي $C$. يمكنك التحقق من إجابتك عبر تعويض 4 في كل تعبير والتحقق من أن لكلا الوترين الطول نفسه.

## التمارين

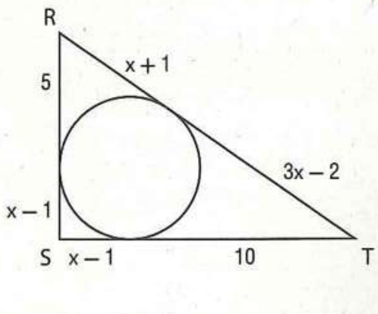
**اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.**

**1.** جـد $x$ في الشكل أدناه.




A 4
B 5
C 6
D 7

**2.** يحيط المثلث $RST$ بالدائرة المبينة أدناه. فما هو محيط المثلث؟



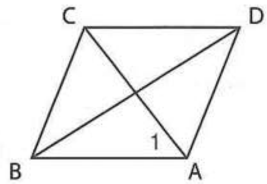

F 33 وحدة
G 36 وحدة
H 37 وحدة
J 40 وحدة

# تدريب على الاختبار المعياري

## اختيار من متعدّد

**اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.**

**1.** إذا كان $ABCD$ معيّنًا، و $m\angle ABC = 70°$، فما قياس الزاوية $m\angle 1$؟




A 45°
B 55°
C 70°
D 125°

**2.** يقول أيوب إنك إذا كنت تعيش في مدينة العين، إذًا فأنت تعيش في الإمارات العربية المتحدة. ما الافتراض الذي ستحتاج إلى وضعه للتوصل إلى برهان غير مباشر لهذا القول؟

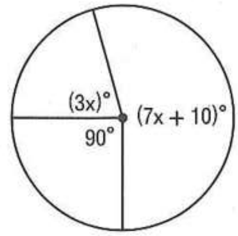
F أفترض أن شخصًا ما يعيش في الإمارات العربية المتحدة، ولكن ليس في مدينة العين.

G أفترض أن شخصًا ما يعيش في مدينة العين، ولكن ليس في الإمارات العربية المتحدة.

H أفترض أن شخصًا ما يعيش في مدينة العين في الإمارات العربية المتحدة.

J أفترض أن شخصًا ما يعيش في الإمارات العربية المتحدة وفي مدينة العين.

**3.** ما قيمة $x$ في الشكل؟

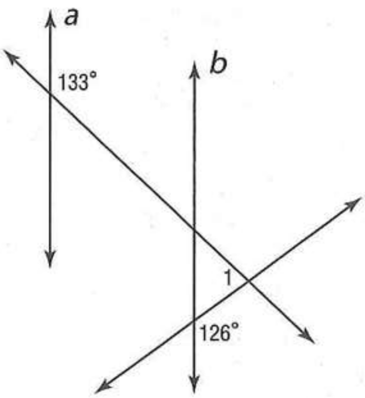



A 19
B 23
C 26
D 28

**نصيحة عند حل الاختبار**

**السؤال 3** استخدم خواصّ الدوائر لتنظيم معادلةٍ وحلّها لإيجاد $x$.

**4.** إذا علمت أن $a \parallel b$، جـد $m\angle 1$.




F 47°
G 54°
H 79°
J 101°

**5.** أي من الشروط التالية لن يضمن أن يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟

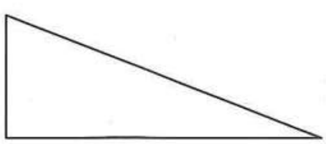
A كل ضلعين متقابلين متطابقان.

B كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

C ينصّف القطران بعضهما بعضًا.

D ضلعان متقابلان فقط متوازيان.

**6.** تساوي نسبة قياس زوايا المثلث المبين أدناه 1:2:3. فأي مما يلي *ليس* قياسًا لزاويةٍ في المثلث؟

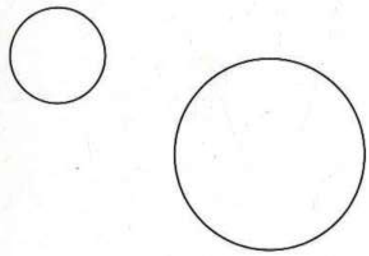


F 30°
G 45°
H 60°
J 90°

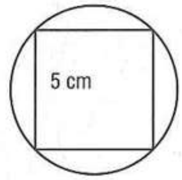
## الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

**اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.**

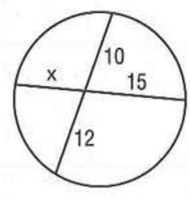
**7.** انسخ الدائرة أدناه على ورقة وارسم المماسات المشتركة إن وجد أي منها.



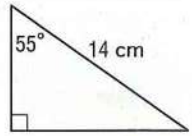
**8. إجابة شبكية** يحاط مربعٌ طول ضلعه 5 cm بدائرة. فما هو محيط الدائرة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرة من السنتيمتر.



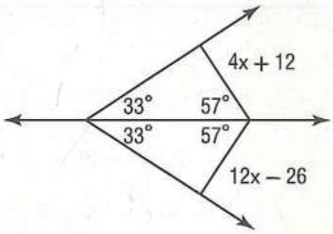

**9.** حُلّ لإيجاد قيمة $x$ في الشكل. واكتب الحل هنا.



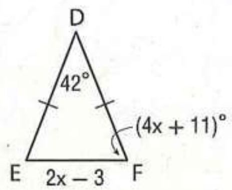

**10. الإجابة الشبكية** ما هو محيط المثلث قائم الزاوية أدناه؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.




**11. الإجابة الشبكية** حل لإيجاد قيمة $x$ في الشكل أدناه.



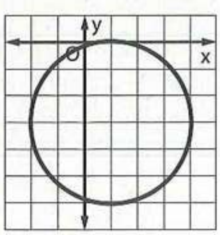

**12.** ما طول $\overline{EF}$؟




## الإجابة الموسعة

**دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.**

**13.** استخدم الدائرة الموضحة للإجابة عن كل من الأسئلة التالية.



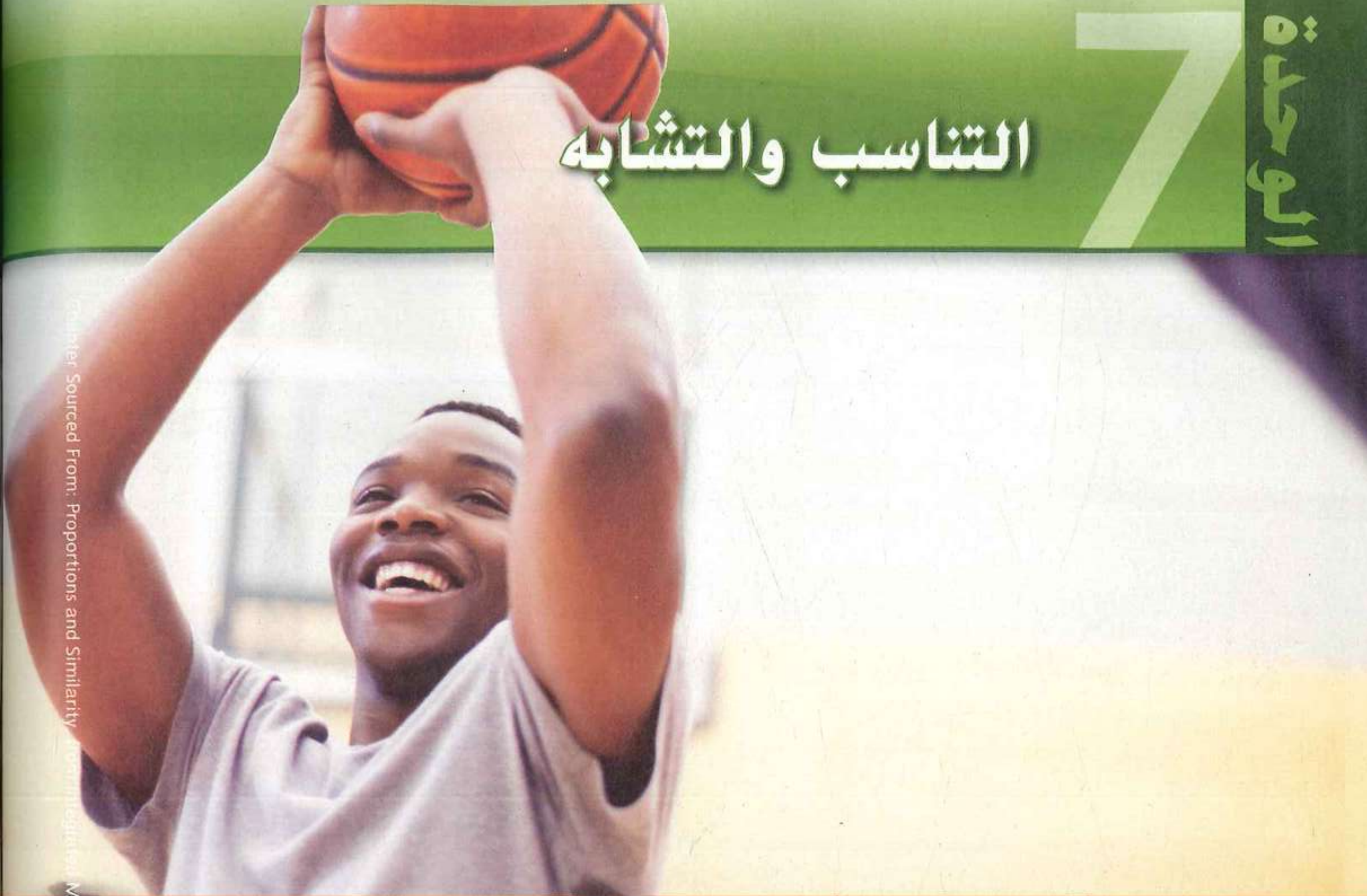

**a.** ما هو مركز الدائرة؟

**b.** ما هو نصف قطر الدائرة؟

**c.** اكتب معادلةً للدائرة.

# الوحدة 7

# التناسب والتشابه



## السابق

لقد درست موضوع النسبة والتناسب واستخدمته في تطبيقات من الحياة اليومية.

## الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- تحديد المضلعات المتشابهة واستخدام النسبة والتناسب في حل المسائل.
- تحديد واستخدام تحويلات التشابه.
- استخدام النماذج المقياسية/المصغرة والرسومات ذات المقياس النسبي في حل المسائل.

## لماذا؟ ▲

**الرياضة** يمكن استخدام المثلثات المتشابهة في الرياضة لوصف مسار كرة، مثل التمريرة المرتدة التي تنتقل من شخص لآخر.

# الاستعداد للوحدة

## 1 خيار الكتاب المدرسي
أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

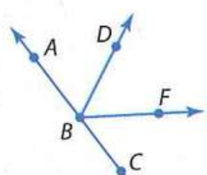
### تدريب سريع

**حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

1. $\frac{3x}{8} = \frac{6}{x}$
2. $\frac{7}{3} = \frac{x-4}{6}$
3. $\frac{x+9}{2} = \frac{3x-1}{8}$
4. $\frac{3}{2x} = \frac{3x}{8}$

5. **التعليم** نسبة الطلاب إلى المعلمين في إحدى المدارس الثانوية هي 17 إلى 1. فإذا كان عدد الطلاب في المدرسة هو 1,088 طالبًا، فكم يبلغ عدد المعلمين؟

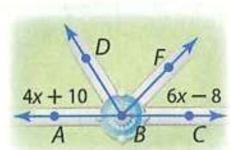
**الجبر** في الشكل التالي، $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ شعاعان متعاكسان و $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABF$.




6. إذا كان $m\angle ABF = 3x - 8$ و $m\angle ABD = x + 14$، فجـد $m\angle ABD$.

7. إذا كان $m\angle FBC = 2x + 25$ و $m\angle ABF = 10x - 1$، فجـد $m\angle DBF$.

8. **المناظر الطبيعية** يخطط مهندس مناظر طبيعية لإضافة أرصفة حول نافورة كما هو مبين في الشكل التالي. إذا كان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ شعاعين متقابلين و $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABF$، فجـد $m\angle FBC$.




### مراجعة سريعة

**مثال 1**

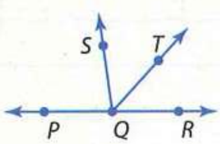
**حُـلّ المعادلة**

$$\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$$

| | |
|---|---|
| $\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$ | المعادلة الأصلية |
| $3(4x-3) = 5(2x+11)$ | الضرب التبادلي |
| $12x - 9 = 10x + 55$ | خاصية التوزيع |
| $2x = 64$ | خاصية الإضافة. |
| $x = 32$ | بسّط. |

**مثال 2**

**في الشكل التالي، $\overrightarrow{QP}$ و $\overrightarrow{QR}$ شعاعان متعاكسان و $\overrightarrow{QT}$ ينصف $\angle SQR$. إذا كان $m\angle SQR = 6x + 8$ و $m\angle TQR = 4x - 14$، فجـد $m\angle SQT$.**




بما أن $\overrightarrow{TQ}$ ينصف $\angle SQR$، فإن $m\angle SQR = 2(m\angle TQR)$.

| | |
|---|---|
| $m\angle SQR = 2(m\angle TQR)$ | تعريف منصف $\angle$ |
| $6x + 8 = 2(4x - 14)$ | بالتعويض |
| $6x + 8 = 8x - 28$ | خاصية التوزيع |
| $-2x = -36$ | اطرح. |
| $x = 18$ | بسّط. |

بما أن $\overrightarrow{TQ}$ ينصف $\angle SQR$، فإن $m\angle SQT = m\angle TQR$.

| | |
|---|---|
| $m\angle SQT = m\angle TQR$ | تعريف منصف $\angle$ |
| $m\angle SQT = 4x - 14$ | بالتعويض |
| $m\angle SQT = 58$ | $x = 18$ |

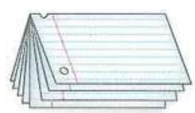
# البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.
قد ترغب بالرجوع إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

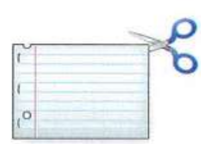
## المطويات® منظّم الدراسة

**التناسب والتشابه** اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك على هذه الوحدة فيما يتعلق بالتناسب، والمضلعات المتشابهة، وتحويلات التشابه. ابدأ باستخدام أربع ورقات من الدفتر.

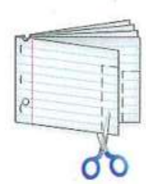
1 **قم** بطي الورقات الأربع عند المنتصف.



2 **اقطع** بطول الحافة العلوية المطوية للورقات. استخدم الدبابيس عند الجانب لتكوين كتاب.



3 **اقطع** الجانب الأيمن من كل ورقة لعمل تبويب لكل درس.



4 **اكتب** على كل تبويب رقم الدرس، كما هو موضح.


## المفردات الجديدة

نسبة ratio

تناسب proportion

طرفا التناسب extremes

وسطا التناسب means

الضرب التبادلي
cross products

المضلعات المتشابهة
similar polygons

معامل المقياس scale factor

تغيير الأبعاد (التمدد) dilation

تشابه similarity

تحويل transformation

تكبير enlargement

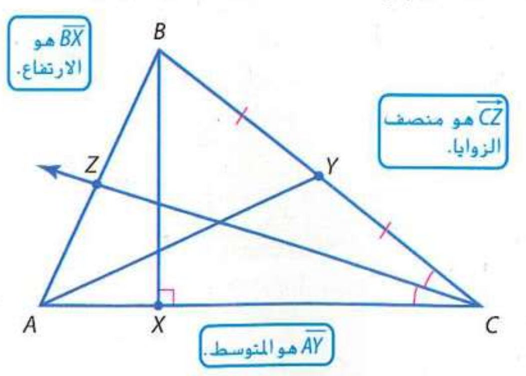
تصغير reduction

نموذج مقياسي/مصغر
scale model

رسم مقياسي
scale drawing

## مراجعة المفردات

**الارتفاع** هو عبارة عن طول القطعة المستقيمة من أحد رؤوس المثلث وعمودية على الضلع المقابل للرأس.
**منصف الزوايا** هو عبارة عن شعاع يقسّم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.
**المتوسط** هو عبارة عن قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث وتصل إلى منتصف الضلع المقابل للرأس.



# الدرس 7-1 النسب والتناسب

| :: السابق | :: الحالي | :: لماذا؟ |
|---|---|---|
| • لقد قمت بحل المسائل بكتابة معادلات وحلها. | 1 كتابة النسبة.<br>2 كتابة تناسبات وإيجاد حلها. | • نسبة الطول إلى العرض في شاشة التلفاز أو الكمبيوتر هي طول الشاشة مقسومًا على عرضها. شاشة التليفزيون القياسية لها نسبة طول إلى عرض تساوي $\frac{4}{3}$ أو 4:3، بينما شاشة التليفزيون عالية الدقة (HDTV) تصل نسبة طولها إلى عرضها 16:9. |

## المفردات الجديدة

نسبة ratio

النسب الموسعة/الممتدة extended ratios

تناسب proportion

طرفا التناسب extremes

وسطا التناسب means

الضرب التبادلي cross products

## ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

**1 كتابة النسب واستخدامها** **النسبة** عبارة عن مقارنة كميتين باستخدام القسمة. يمكن التعبير عن نسبة الكميتين $a$ و $b$ بالصورة $a$ إلى $b$ أو $a : b$ أو $\frac{a}{b}$، حيث $b \neq 0$. النسب يعبر عنها عادةً في أبسط صورة. نسبة البعدين 32:18 و 16:9 متساوية.

$$\frac{\text{طول الشاشة}}{\text{عرض الشاشة}} = \frac{32 \text{ in.}}{18 \text{ in.}}$$ اقسم الوحدات

$$= \frac{32 \div 2}{18 \div 2} = \frac{16}{9}$$ اقسم على العوامل المشتركة

### مثال 1 من الحياة اليومية كتابة النسب وتحويلها لأبسط صورة

**الألعاب الرياضية متوسط عدد النقاط للاعب السلة هو نسبة عدد الأهداف ذات النقطتين إلى عدد الأهداف ذات الثلاث نقاط. وقد حقق عبد الله لاعب فريق الأهلي أعلى متوسط للنقاط في في أحد المواسم الرياضية إذا أحرز عبد الله 521 هدفًا ذو ثلاث نقاط و 181 هدفًا ذو نقطتين، احسب متوسط نقاط عبد الله.**

اقسم عدد الأهداف ذات النقطتين على عدد الأهداف ذات الثلاث نقاط

$$\frac{\text{عدد الأهداف ذات النقطتين}}{\text{عدد الأهداف ذات الثلاث نقاط}} = \frac{181}{521}$$

$$\approx \frac{0.347}{1}$$ النسبة التي تبلغ فيها قيمة المقام 1 تسمى *نسبة الوحدة*.

فيصبح متوسط ضربات عبد اللّه هو 0.347.

**تمرين موجّه**

1. **نشاط مدرسي** يوجد في مدرسة أسامة الثانوية 190 معلمًا و 2,650 طالبًا. ما النسبة التقريبية للطلاب إلى المعلمين في هذه المدرسة؟

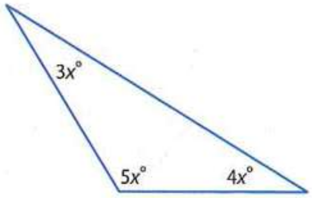
**النسب الموسعة** يمكن استخدامها لمقارنة ثلاث كميات أو أكثر. فالتعبير $a : b : c$ يعني أن نسبة أول كميتين $a : b$، ونسبة آخر كميتين هي $b : c$، ونسبة الكمية الأولى والأخيرة هي $a : c$.

## مثال 2 استخدام النسب الموسعة

**اذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث هي 5:4:3. فجـد قياسات الزوايا.**

نظرًا لأن النسبة $\frac{3}{4}$ أو 3:4 مساوية للنسبة $\frac{3x}{4x}$ أو $4x : 3x$. إذًا يمكن كتابة النسبة الموسعة 5 : 4 : 3 كالآتي $3x:4x:5x$.

ارسم المثلث واكتب قياسات زواياه.
ثم اكتب معادلة وجـد حلها لإيجاد قيمة $x$.




| | |
|---|---|
| $3x + 4x + 5x = 180$ | نظرية مجموع زوايا المثلث |
| $12x = 180$ | اجمع الحدود المتشابهة. |
| $x = 15$ | اقسم كل طرف على 12. |

إذًا قياسات الزوايا هي 3(15) أو 45 و 4(15) أو 60 و 5(15) أو 75.

**التحقق** مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي 180.

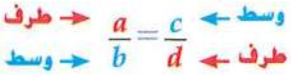
$45 + 60 + 75 = 180$ ✓

### تمرين موجّه

**2.** في مثلث، تبلغ نسبة أطوال الأضلاع 3 : 2 : 2 ومحيطه يساوي 392 cm. أوجِد طول أطول ضلع بهذا المثلث.

## 2

**استخدام خواص التناسبات** المعادلة التي توضح أن النسبتين متساويتان تسمى **معادلة التناسب**. في معادلة التناسب التالية $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، العددان $a$ و $d$ يسميان **طرفي** التناسب، بينما العددان $b$ و $c$ يسميان **وسطي** التناسب.




ناتج ضرب الطرفين $ad$ وناتج ضرب الوسطين $bc$ يسمى **الضرب التبادلي**.

### قراءة في الرياضيات

**التناسب** عند كتابة التناسب باستخدام النقطتين، فنقرأه باستخدام كلمة *إلى* بدلاً من النقطتين. مثال، 3 : 2 تقرأ *2 إلى 3*. وسطا التناسب هما العددان الداخليان، وطرفا التناسب هما العددان الخارجيان.


### المفهوم الأساسي خاصية نواتج الضرب التبادلي

| | |
|---|---|
| **الشرح** | في التناسب، ناتج ضرب الطرفين يساوي ناتج ضرب الوسطين. |
| **الرموز** | إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ عندما $b \neq 0$ و $d \neq 0$، فإذًا $ad = bc$. |
| **مثال** | إذا كان $\frac{4}{10} = \frac{6}{15}$، فإذًا $4 \times 15 = 10 \times 6$. |

ستُثبت خاصية نواتج الضرب التبادلي في التمرين 41.

معكوس خاصية نواتج التقاطعي صحيح أيضًا. إذا كان $ad = bc$ و $b \neq 0$ و $d \neq 0$،
فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. بمعنى أن، $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ تشكل معادلة تناسب. يمكنك استخدام خاصية الضرب التبادلي لإيجاد حل معادلة التناسب.

## مثال 3 استخدام نواتج الضرب التبادلي لحل التناسبات

**حُـلّ كلاً من التناسبات التالية.**

a. $\frac{6}{x} = \frac{21}{31.5}$

| | |
|---|---|
| $\frac{6}{x} = \frac{21}{31.5}$ | التناسب الأصلي |
| $6(31.5) = x(21)$ | خاصية الضرب التبادلي |
| $189 = 21x$ | بسّط |
| $9 = x$ | جـد قيمة $x$ |

b. $\frac{x+3}{2} = \frac{4x}{5}$

$$\frac{x+3}{2} = \frac{4x}{5}$$
$$(x+3)5 = 2(4x)$$
$$5x + 15 = 8x$$
$$15 = 3x$$
$$5 = x$$

**نصيحة دراسية**

**المثابرة** المثال 3b يمكن حله عن طريق ضرب كل طرف في 10، المقام المشترك الأصغر.

$$10\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{4x}{5}(10)$$
$$5(x+3) = 2(4x)$$
$$5x + 15 = 8x$$
$$15 = 3x$$
$$5 = x$$

**تمرين موجّه**

3A. $\frac{x}{4} = \frac{11}{-6}$  3B. $\frac{-4}{7} = \frac{6}{2y+5}$  3C. $\frac{7}{z-1} = \frac{9}{z+4}$

يمكن استخدام التناسب لعمل توقعات.

## مثال 4 من الحياة اليومية استخدام التناسب لعمل توقعات

**امتلاك سيارة أجرى أحمد دراسة مسحية على 50 طالبًا يذهبون إلى المدرسة بالسيارة ووجد أن 28 طالبًا منهم يملكون سيارة. إذا كان عدد الطلاب الذين يذهبون إلى مدارسهم بالسيارة هو 755 طالبًا، فتوقع إجمالي عدد الطلاب الذين يمتلكون سيارة.**

اكتب وحُلّ التناسب الذي يقارن عدد الطلاب الذين يملكون سيارة إلى عدد الطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة بالسيارة.

$\frac{28}{50} = \frac{x}{755}$ ← الطلاب الذين يمتلكون سيارات ← الطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة بالسيارة

| | |
|---|---|
| $28 \times 755 = 50 \times x$ | خاصية الضرب التبادلي |
| $21{,}140 = 50x$ | بسّط. |
| $422.8 = x$ | اقسم كل طرف على 50. |

بناءً على دراسة أحمد، حوالي 423 طالبًا في مدرسته يمتلكون سيارة.

**الربط بالحياة اليومية**

النسبة المئوية لقائدي السيارات من الشباب (الفئة العمرية من 15 إلى 20) باستخدام سياراتهم الخاصة تضاعفت تقريبًا في كل أنحاء البلاد من 22 في المئة في عام 1985 إلى 42 في المئة في عام 2003.

**المصدر:** CNW Marketing Research

**تمرين موجّه**

**4. علم الأحياء** في إحدى التجارب، اصطاد الطلاب بعض الفراشات، وسجلوا أرقامًا على أجنحتها، ثم أطلقوا سراحها. اصطاد الطلاب 48 فراشة منها ثلاث فراشات بعلامات على أجنحتها. توقع عدد الفراشات التي ستحمل علامات على أجنحتها عند اصطياد 100 فراشة.

التناسب الموضح في المثال 4 ليس هو التناسب الصحيح الوحيد لهذه الحالة. كل صيغ التناسب المتكافئة لها نواتج ضرب تقاطعي متطابقة.

### المفهوم الأساسي التناسبات المتكافئة

**الرموز** التناسبات التالية متكافئة.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

**أمثلة**

$$\frac{28}{50} = \frac{x}{755}, \frac{50}{28} = \frac{755}{x}, \frac{28}{x} = \frac{50}{755}, \frac{x}{28} = \frac{755}{50}$$

## التحقق من فهمك

مثال 1

1. **حيوانات أليفة** في دراسة شملت 1000 أسرة، وجد أن منهم 460 أسرة تقتني على الأقل كلبًا واحدًا أو قطة كحيوان أليف . ما نسبة مالكي الحيوانات الأليفة إلى عدد الأسر؟

2. **الألعاب الرياضية** تتنافس ثلاثون فتاة على 15 مركزًا في فريق كرة السلة. ما نسبة المراكز المتاحة إلى الفتيات المتنافسة؟

مثال 2

3. نسبة أطوال ثلاثة أضلاع في مثلث هي 4 : 5 : 2، ومحيطه يساوي 165 وحدة. جــد طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

4. نسبة قياسات ثلاث زوايا في مثلث هي 8 : 6 : 4. جــد قياس كل زاوية من زوايا المثلث.

مثال 3

**حُــلّ كلاً من التناسبات التالية.**

5. $\frac{2}{3} = \frac{x}{24}$ 6. $\frac{x}{5} = \frac{28}{100}$ 7. $\frac{2.2}{x} = \frac{26.4}{96}$ 8. $\frac{x-3}{3} = \frac{5}{8}$

مثال 4

9. **استخدام النماذج** تُعِد حليمة خبز التفاح من أجل المقصف في مجلس الطلاب. الوصفة التي تعدها تتطلب 2 بيضة لكل 12 قطعة خبز، وهي تحتاج لعمل 108 قطعة. فكم عدد البيض الذي ستحتاج إليه؟

## التمرين وحل المسائل

مثال 1

**أفلام بالنسبة للتمرينين 10 و 11، ارجع إلى الرسم البياني أدناه.**


10. من قائمة الأفلام، ما الأفلام التي حصلت على أعلى نسبة من جوائز الأوسكار مقارنةً بعدد الأفلام المرشحة لهذه الجوائز؟

11. ما هو الفيلم الذي حصل على أقل نسبة جوائز مقارنةً بعدد الأفلام المرشحة لهذه الجوائز؟

مثال 2

12. **الألعاب** متجر ألعاب فيديو به 60 لعبة للاختيار من بينها، من بينها 40 لعبة رياضية. ما هي نسبة الألعاب الرياضية إلى ألعاب الفيديو؟

13. نسبة أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلث هي 5 : 7 : 9، ومحيطه يساوي 191.1 cm. جــد طول كل ضلع.

14. نسبة أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلث هي 5 : 7 : 3، ومحيطه يساوي 156.8 m. جــد طول كل ضلع.

15. نسبة أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلث هي $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{6}$، ومحيطه يساوي 4.75 m. أوجد طول أطول ضلع بهذا المثلث.

16. نسبة أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلث هي $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$، ومحيطه يساوي 31.5 cm. أوجد طول الضلع الأقصر.

**جــد قياسات زوايا كل مثلث.**

**17.** نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 1 : 6 : 3.

**18.** نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 8 : 5 : 7.

**19.** نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 6 : 8 : 10.

**20.** نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 7 : 4 : 5.

مثال 3 **حُــلّ كلاً من التناسبات التالية.**

**21.** $\frac{5}{8} = \frac{y}{3}$ **22.** $\frac{w}{6.4} = \frac{1}{2}$ **23.** $\frac{4x}{24} = \frac{56}{112}$ **24.** $\frac{11}{20} = \frac{55}{20x}$

**25.** $\frac{2x+5}{10} = \frac{42}{20}$ **26.** $\frac{a+2}{a-2} = \frac{3}{2}$ **27.** $\frac{3x-1}{4} = \frac{2x+4}{5}$ **28.** $\frac{3x-6}{2} = \frac{4x-2}{4}$

مثال 4

**29.** **تغذية** وفقًا لدراسة حديثة، فإن 7 أشخاص من بين كل 500 شخص في الفئة العمرية من 13 إلى 17 عاما نباتيون. في مجموعة من 350 شخصاً تبلغ أعمارهم من 13 إلى 17 عاماً، كم شخصًا تتوقع أن يكونوا نباتيين؟

**30.** **العملات** ستسافر عائلتك إلى المكسيك لقضاء العطلة. وقد وفرت AED 500 لاستخدامها في النفقات. إذا كان 269 من العملة المكسيكية البيزو تساوي AED 91.80، فما هو المبلغ الذي ستحصل عليه عندما تستبدل AED 500 مقابل البيزو؟

**الجبر** **حُــلّ كلاً من التناسبات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.**

**31.** $\frac{2x+3}{3} = \frac{6}{x-1}$ **32.** $\frac{x^2+4x+4}{40} = \frac{x+2}{10}$ **33.** $\frac{9x+6}{18} = \frac{20x+4}{3x}$

**34.** محيط أحد المستطيلات يساوي 98 m. نسبة طوله إلى عرضه تساوي 2 : 5. جــد مساحة المستطيل.

**35.** محيط أحد المستطيلات يساوي 220 in. نسبة طوله إلى عرضه تساوي 3 : 7. جــد مساحة المستطيل.

**36.** نسبة أطوال أضلاع شكل رباعي هي 4 : 5 : 3 : 2. ومحيطه يساوي 154 in. أوجد طول الضلع الأقصر.

**37.** نسبة قياس زوايا شكل رباعي هي 3 : 6 : 4 : 2. جــد قياسات زوايا هذا الشكل.

**38.** **وظائف صيفية** في شهر يونيو عام 2000، كان لدى 60.2% من الشباب الأمريكيين من 16 إلى 19 عاماً وظائف صيفية. بحلول شهر يونيو عام 2006، كان 51.6% من الشباب في هذه الفئة العمرية جزءًا من القوى العاملة الصيفية.

**a.** هل عدد من لديهم وظائف صيفية من الفئة العمرية من 16 إلى 19 عامًا زاد أم نقص منذ عام 2000؟ اشرح استنتاجك.

**b.** في يونيو 2006، كم عدد الشباب في الفئة العمرية من 16 إلى 19 عامًا الذين تتوقع أن يحصلوا على وظائف من بين 700 شاب من هذه الفئة العمرية؟ اشرح استنتاجك.

**39.** **استخدام النماذج** في أحد المستطيلات الذهبية، كانت نسبة الطول إلى العرض 1.618 تقريبًا. وهذا ما أصبح يعرف باسم *النسبة الذهبية*.

**a.** باستدعاء المعلومات من صفحة بداية الدرس نجد أن شاشة التليفزيون قياسية لها نسبة بعدين تساوي 4 : 3، بينما شاشة التليفزيون عالية الدقة لها نسبة بعدين تساوي 9 : 16. هل كلا النوعين من الشاشات هو مستطيل ذهبي؟ اشرح.

**b.** يمكن استخدام النسبة الذهبية أيضا في تحديد نظام التخطيط لأعمدة صفحات الإنترنت. فكر في موقع به عمودان، الأيسر للمحتويات والأيمن يعمل كشريط جانبي. نسبة عرض العمود الأيسر إلى الأيمن هي النسبة الذهبية. حدد عرض كل عمود إذا كان عرض الصفحة يساوي 960 بيكسل.

**40.** **أنشطة مدرسية** أظهرت دراسة استطلاعية عن الاشتراك في الأندية الرياضية أنه من بين 36 طالبًا شملتهم الدراسة، كانت نسبة أعضاء النادي الأجتماعي إلى أعضاء النادي الثقافي إلى أعضاء النادي الرياضي هي 7 : 3 : 2. كم عدد أعضاء النادي الثقافي من الذين شملتهم هذه الدراسة؟ افترض أن كل طالب هو عضو نشط في نادٍ واحد فقط.

**41. برهان** اكتب برهانًا جبريًا لخاصية نواتج الضرب التبادلي.

**42. ألعاب رياضية** تركض حصة ركضا خفيفًا على نفس المسار كل يوم في الشتاء لكي تحافظ على لياقتها من أجل موسم السباقات. وهي تركض بمعدل ثابت، وتقضي 39 دقيقة في الجري. فإذا كانت نسبة أوقات مراحل الجري هي 3:5:1:4، فكم تستغرق منها مرحلة الجري الثانية؟

**43. التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقات المتناسبة في المثلثات.

**a. هندسيًا** ارسم مثلثًا متساوي الساقين $ABC$. قِس طول الساقين وزاوية الرأس واكتب ذلك. ارسم مثلثًا ثانيًا $MNO$ بزاوية رأس متطابقة وساقين مثلي طول الساقين في المثلث $ABC$. ارسم مثلثًا ثالثًا $PQR$ بزاوية رأس متطابقة وساقين نصف طول الساقين في المثلث $ABC$.

**b. جدوليًا** انسخ الجدول أدناه وأكمله بالقيم المناسبة.

| المثلث | $ABC$ | $MNO$ | $PQR$ |
|---|---|---|---|
| طول الساق | | | |
| المحيط | | | |

**c. لفظيًا** قم بتخمين التغير في محيط مثلث متساوي الساقين إذا بقيت زاوية الرأس ثابتة وتغير طول الساق زيادةً ونقصانًا بمعامل ثابت.

## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

**43. تحليل الخطأ** قامت كلٌّ من أمل وأماني بحل التناسب التالي $\frac{1}{2}=\frac{x-3}{4}$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

| أماني | أمل |
|---|---|
| $x-3(2)=4(1)$ | $(x-3)1=4(2)$ |
| $x-3=4$ | $x-3=8$ |
| $x=7$ | $x=11$ |

**45. تحدي** أبعاد أحد المستطيلات هي $y$ و $y^2+1$ ومحيطه يساوي 14 وحدة. جـد نسبة طول الضلع الأطول إلى طول الضلع الأقصر في المستطيل.

**46. التبرير** نسبة أطوال القطرين في الشكل الرباعي هي 1:1. نسبة أطوال الأضلاع المتتالية في الشكل الرباعي هي 3:4:3:5. صنّف الشكل الرباعي. اشرح.

**4. أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة؟** حدد التناسب الذي لا ينتمي إلى التناسبات الثلاثة الأخرى. اشرح استنتاجك.

$\frac{7}{9}=\frac{19.6}{25.2}$    $\frac{5}{6}=\frac{14}{16.8}$    $\frac{2}{3}=\frac{5}{7.5}$    $\frac{3}{8}=\frac{8.4}{22.4}$

**48. مسألة غير محددة الإجابة** اكتب أربع نسب مكافئة للنسبة 2:5. اشرح سبب تساوي جميع النسب.

**49. الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين النسبة والتناسب. اشرح كيف تستخدم كلاهما في حل مسألة.

## تدريب على الاختبار المعياري

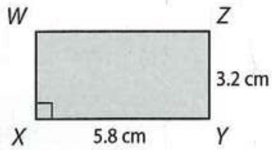
**.50** حُلّ التناسب التالي.

$$\frac{x}{-8} = \frac{12}{6}$$

**A** $-12$ **C** $-16$

**B** $-14$ **D** $-18$

**.51** ما مساحة المستطيل $WXYZ$؟




**F** $18.6 \text{ cm}^2$ **H** $21.2 \text{ cm}^2$

**G** $20.4 \text{ cm}^2$ **J** $22.8 \text{ cm}^2$

**.52** **إجابة شبكية** تبلغ أبعاد غرفة السيدة آمنة ذات الشكل المستطيل 12 m في 10 m. وهي ترغب في شراء سجادة لهذه الغرفة تكلف AED 9.40 لكل متر مربع، شاملة الضريبة. فكم ستكون التكلفة بالدرهم لفرش غرفتها بالسجاد؟

**.53** **SAT/ACT** لدى بثينة أقراص DVD تزيد عن أربعة أضعاف ما لدى هنا بمقدار 5. لو كان لدى هنا $x$ أقراص، فإذًا بدلالة $x$، كم يبلغ عدد الأقراص التي لدى بثينة؟

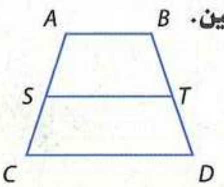
**A** $4(x + 5)$ **D** $4x + 5$

**B** $4(x + 3)$ **E** $5x + 4$

**C** $9x$

## مراجعة شاملة

**بالنسبة لشبه المنحرف $ABCD$ و $T$ و $S$ هما نقطتا منتصف الساقين.**

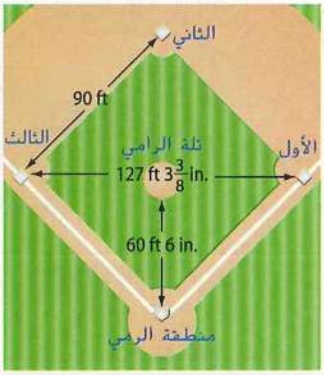



**.54** إذا كان $CD = 14$ و $ST = 10$ و $AB = 2x$، فجـد $x$.

**.55** إذا كان $AB = 3x$ و $ST = 15$ و $CD = 9x$، فجـد $x$.

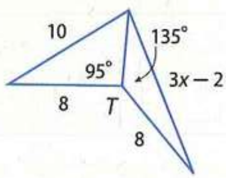
**.56** إذا كان $AB = x + 4$ و $CD = 3x + 2$ و $ST = 9$، فجـد $AB$.

**.57** **ألعاب رياضية** الجزء الداخلي من منطقة الرمي في البيسبول مربع الشكل، كما هو موضح على اليسار. هل تلة الرامي تقع في منتصف الجزء الداخلي؟ اشرح.

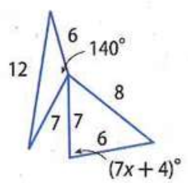



**اكتب متباينة لمدى قيم $x$.**

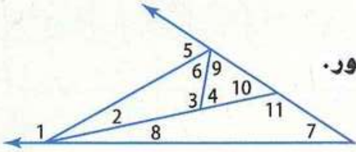
**.58**




**.59**




**استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المستوفية للشرط المذكور.**




**.60** القياسات أقل من $m\angle 5$

**.61** القياسات أكبر من $m\angle 6$

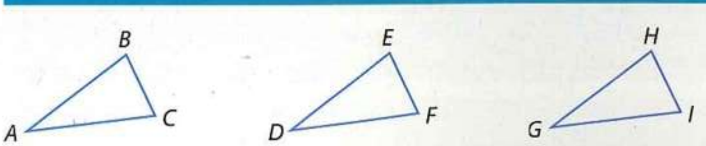
**.62** القياسات أكبر من $m\angle 10$

**.63** القياسات أقل من $m\angle 11$

**.64** **استنتاج** جـد مثالاً مناقضاً للعبارة التالية.
إذا كان الخطان المستقيمان $\ell$ و $m$ يقطعهما القاطع $t$ بحيث تكون الزوايا الداخلية المتتالية متطابقة، فإن الخطين المستقيمين $\ell$ و $m$ يكونان متوازيين وتكون $t$ عمودية على كلا الخطين المستقيمين.

## مراجعة المهارات

**اكتب فقرة إثبات.**




**.65** **المعطيات:** $\triangle ABC \cong \triangle DEF; \triangle DEF \cong \triangle GHI$

**المطلوب:** $\triangle ABC \cong \triangle GHI$

# 7-1 مختبر تقنية التمثيل البياني
# فيبوناتشي والنسب

ولد ليوناردو بيسانو (من 1170 إلى 1250 ميلادية)، أو فيبوناتشي في إيطاليا ولكنه تعلم في شمال إفريقيا. ولذلك، كانت أعماله مشابهة لأعمال مؤلفي شمال إفريقيا في ذلك الوقت. كتابه *Liber abaci*، المنشور في 1202، قدم لنا ما يعرف الآن باسم متتالية فيبوناتشي، والتي فيها كل حد بعد أول حدين يساوي ناتج جمع العددين السابقين له .

| الحد | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد فيبوناتشي | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| | | 1+1 | 1+2 | 2+3 | 3+5 | 5+8 | |

## النشاط

**يمكنك استخدام تطبيقات خاصة على بعض حاسبات التمثيل البياني وذلك لحساب حدود متتالية فيبوناتشي. ثم قارن كل حدٍّ بالذي قبله.**


**الخطوة 1** افتح تطبيق **CellSheet** بالضغط على المفتاح APPS. اختر رقم **الخلية** واضغط على ENTER.

**الخطوة 2** أدخل رؤوس الأعمدة في الصف 1. استخدم مفتاح **ALPHA** لإدخال الحروف ثم اضغط على [ " ] في بداية كل عنوان.

**الخطوة 3** أدخل **1** في الخلية **A2**. ثم أضف الصيغة **A2+1=** في الخلية **A3**. اضغط STO لإضافة علامة = إلى الصيغة. ثم استخدم F3 لنسخ هذه الصيغة واستخدم F4 للصقها في كل خلية من خلايا العمود. وهذا سيحسب تلقائيًا العدد الموجود في كل حد.


**الخطوة 4** في **العمود B**، سنسجل أعداد فيبوناتشي. أدخل رقم 1 في الخلايا **B2** و **B3** لعدم وجود حدين سابقين لإضافتهما. ثم أدخِل الصيغة **B2+B3=** في الخلية **B4**. انسخ هذه الصيغة إلى أسفل العمود.

**الخطوة 5** في **العمود C**، سنجد نسبة كل حد إلى الحد الذي يسبقه. أدخل رقم 1 في الخلية **C2** لعدم وجود حد يسبقه. ثم أدخل B3/B2 في الخلية **C3**. انسخ هذه الصيغة إلى أسفل العمود. *تعرض الشاشات نتائج الحدود من 1 حتى 11.*

## تحليل النتائج

**1.** ماذا يحدث لعدد فيبوناتشي عند زيادة عدد الحدود؟

**2.** ما نمط الأعداد الفردية والزوجية الذي تلاحظه في متتالية فيبوناتشي؟

**3.** ما النمط الذي تلاحظه في عمود النسبة كلما زاد عدد الحدود؟

**4.** زد في مساحة الورقة لحساب خمسين حدًا من متتالية فيبوناتشي. صِف أيّ اختلاف في الأنماط التي ذكرتها في التمارين 3–1.

**5.** **تخمين** كيف ترتبط متتالية فيبوناتشي بالنسبة الذهبية؟

# الدرس 7-2 المضلعات المتشابهة

| ·· السابق | ·· الحالي | ·· لماذا؟ |
|---|---|---|
| ● لقد استخدمت التناسبات في حل المسائل. | ● 1 استخدام التناسبات لتحديد المضلعات المتشابهة.<br>2 حل المسائل باستخدام خواص المضلعات المتشابهة. | ● يخصص الناس غالبًا سطح مكتب أجهزة الكمبيوتر لديهم باستخدام الصور، واضعين الصور بمقاساتها الأصلية أو تمديدها لتناسب حجم الشاشة. والطريقة الثانية تشوه منظر الصورة، لاختلاف الصورة الأصلية عن الصورة الثانية من الناحية الهندسية. |

## المفردات الجديدة

**المضلعات المتشابهة**
**similar polygons**

**معامل المقياس**
**scale factor**

## ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

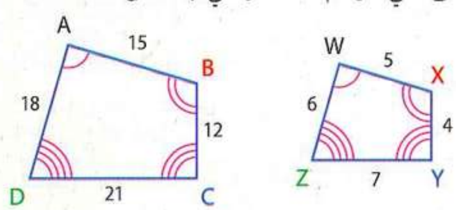
## 1 تحديد المضلعات المتشابهة

**المضلعات المتشابهة** لها نفس الشكل ولكن ليس بالضرورة أن يكون لها نفس القياس.

### المفهوم الأساسي المضلعات المتشابهة

لا يُقال عن مضلعين إنهما متشابهان سوى إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة وكانت أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

**مثال** في الرسم التخطيطي بالأسفل، $ABCD$ مشابه للشكل $WXYZ$.




الزوايا المتناظرة

$\angle A \cong \angle W$ و $\angle B \cong \angle X$ و $\angle C \cong \angle Y$ و $\angle D \cong \angle Z$

الأضلاع المتناظرة

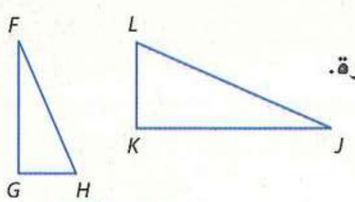
$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{3}{1}$$

**الرموز** $ABCD \sim WXYZ$

كما هو الحال في عبارات التطابق، فإن ترتيب الرؤوس في عبارة التشابه مثل $ABCD \sim WXYZ$ تُعد مهمة. فإنها تحدد الزوايا والأضلاع المتناظرة.

### مثال 1 استخدام عبارات التشابه

**إذا كان $\triangle FGH \sim \triangle JKL$، فأدرج قائمة بكل أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا مرتبطًا بالأضلاع المتناظرة.**




$\triangle FGH \sim \triangle JKL$

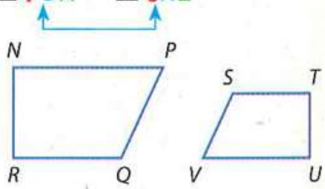
استخدم عبارات التشابه.

الزوايا المتطابقة: $\angle F \cong \angle J,\ \angle G \cong \angle K,\ \angle H \cong \angle L$

الأضلاع المتناسبة: $\frac{FG}{JK} = \frac{GH}{KL} = \frac{HF}{LJ}$

### تمرين موجّه

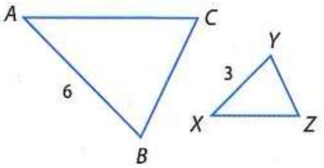
**1.** في الرسم التخطيطي، $NPQR \sim UVST$. أدرج قائمة بكل أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا مرتبطًا بالأضلاع المتناظرة.



### نصيحة دراسية

**نسبة التشابه** معامل المقياس بين مضلعين متشابهين يسمى أحيانًا *بنسبة التشابه*.

تسمى نسبة أطوال الأضلاع المتناظرة في مضلعين متشابهين **بمعامل المقياس**. ويعتمد معامل المقياس على ترتيب المقارنة.



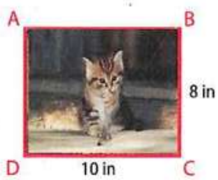

في الرسم التخطيطي، $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

معامل مقياس $\triangle ABC$ إلى $\triangle XYZ$ يساوي $\frac{6}{3}$ أو 2.

ومعامل مقياس $\triangle XYZ$ إلى $\triangle ABC$ يساوي $\frac{3}{6}$ أو $\frac{1}{2}$.

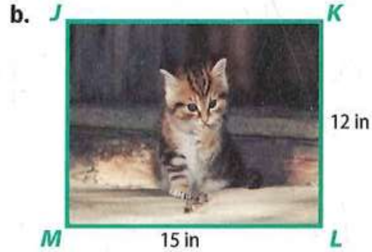
## مثال 2 من الحياة اليومية تحديد المضلعات المتشابهة

**تحرير الصور ترغب حمدة في استخدام الصورة مستطيلة الشكل الموضحة أمامك كخلفية لسطح المكتب على جهاز الكمبيوتر الخاص بها، ولكن يجب عليها تغيير أبعادها. حدد المتشابهات من الصور المستطيلة التالية. فإن كانت كذلك، اكتب عبارة التشابه ومعامل المقياس. اشرح استنتاجك.**




**a.**


**b.**




**a.** **الخطوة 1** قارن الزوايا المتناظرة.

نظرًا لأن كل زوايا المستطيل قائمة والزوايا القائمة متطابقة، فالزوايا المتناظرة متطابقة.

**الخطوة 2** قارن الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{DC}{HG} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \qquad \frac{BC}{FG} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \frac{5}{7} \neq \frac{2}{3}$$

بما أن الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة، $ABCD \nsim EFGH$.
إذًا الصورتان غير متشابهتين.

**b.** **الخطوة 1** بما أن $ABCD$ و $JKLM$ كلاهما مستطيل الشكل، فالزوايا المتناظرة متطابقة.

**الخطوة 2** قارن الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{DC}{ML} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \qquad \frac{BC}{KL} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

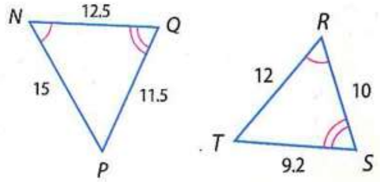
بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، $ABCD \sim JKLM$. إذًا المستطيلان متشابهان بمعامل مقياس $\frac{2}{3}$.

### قراءة في الرياضيات

**رمز التشابه** الرمز $\nsim$ يقرأ غير متشابه مع.

### تمرين موجّه

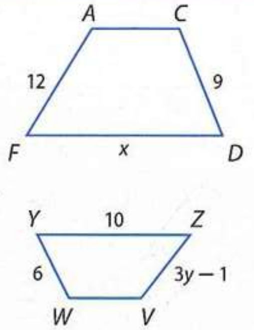
**2.** بيّن إذا ما كان المثلثان الموضحان بالشكل متشابهين أم لا. فإن كانا كذلك، اكتب عبارة التشابه ومعامل المقياس. اشرح استنتاجك.



## 2 استخدام الأشكال المتشابهة يمكنك استخدام معامل المقياس والتناسب لإيجاد حل المسائل التي تشتمل على أشكال متشابهة.

> **نصيحة دراسية**
> **التشابه والتطابق** إذا كان المضلعان متطابقين، فهما أيضًا متشابهان. كل الزوايا المتناظرة متطابقة، وأطوال الأضلاع المتناظرة ذات نسبة تساوي 1:1.

### مثال 3 استخدام الأشكال المتشابهة في إيجاد القياسات المجهولة




**في الشكل المقابل، $ACDF \sim VWYZ$.**

**a. جـد قيمة $x$.**

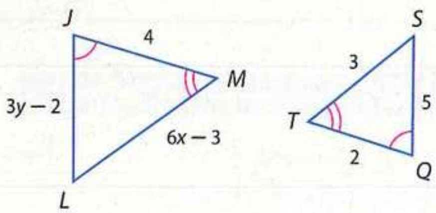
استخدم أطوال الأضلاع المتناظرة في كتابة تناسب.

| | |
|---|---|
| $\frac{CD}{WY} = \frac{DF}{YZ}$ | تناسب التشابه |
| $\frac{9}{6} = \frac{x}{10}$ | $CD = 9,\ WY = 6,\ DF = x,\ YZ = 10$ |
| $9(10) = 6(x)$ | الضرب التبادلي |
| $90 = 6x$ | اضرب. |
| $15 = x$ | اقسِم كل طرف على 6. |

**b. جـد قيمة $y$.**

| | |
|---|---|
| $\frac{CD}{WY} = \frac{FA}{ZV}$ | تناسب التشابه |
| $\frac{9}{6} = \frac{12}{3y - 1}$ | $CD = 9,\ WY = 6,\ FA = 12,\ ZV = 3y - 1$ |
| $9(3y - 1) = 6(12)$ | الضرب التبادلي |
| $27y - 9 = 72$ | اضرب. |
| $27y = 81$ | اجمع 9 إلى كل طرف. |
| $y = 3$ | اقسم كل طرف على 27. |

**تمرين موجّه**




**جـد قيمة كل متغير إذا كان $\triangle JLM \sim \triangle QST$.**

**3A.** $x$

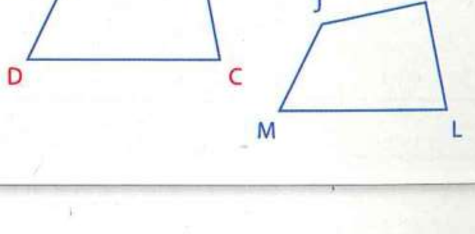
**3B.** $y$

> **نصيحة دراسية**
> **تحديد المثلثات المتشابهة**
> عند وجود زاويتين فقط في مثلث متطابقتين مع الزاويتين المناظرتين لهما في مثلث آخر، تذكر أنه يمكنك استخدام نظرية الزاوية الثالثة لإثبات أن الزاويتين الأخرتين المتناظرتين متطابقتان أيضًا.

في المضلعات المتشابهة، نسبة أي طولين متناظرين تتناسب مع معامل المقياس بينهما. وهذا يقودنا إلى النظرية التالية حول محيطي مضلعين متشابهين.

### نظرية 7.1 محيطات المضلعات المتشابهة

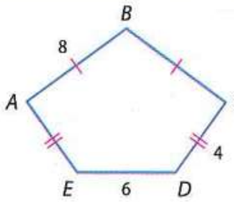
إذا تشابه مضلعان، فإن محيطيهما يكونان متناسبين مع معامل المقياس بينهما.

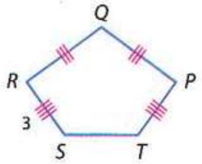



**مثال** إذا كان $ABCD \sim JKLM$، فإذًا

$$\frac{AB + BC + CD + DA}{JK + KL + LM + MJ} = \frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{CD}{LM} = \frac{DA}{MJ}$$

## مثال 4 استخدام معامل المقياس لإيجاد المحيط




**إذا كان $ABCDE \sim PQRST$، فجد معامل مقياس المضلع $ABCDE$ إلى $PQRST$ ومحيط كل مضلع.**

معامل مقياس $ABCDE$ إلى $PQRST$
هو $\frac{CD}{RS}$ أو $\frac{4}{3}$.

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{CD} \cong \overline{AE}$، فمحيط $ABCDE$ يساوي $4 + 6 + 4 + 8 + 8$ أو 30.

استخدم محيط $ABCDE$ ومعامل المقياس لكتابة التناسب.
افترض أن $x$ يمثل محيط المضلع $PQRST$.

$\frac{4}{3} = \frac{\text{محيط } ABCDE}{\text{محيط } PQRST}$ نظرية 7.1

$\frac{4}{3} = \frac{30}{x}$ التعويض

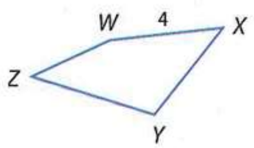
$(3)(30) = 4x$ خاصية نواتج الضرب التبادلي

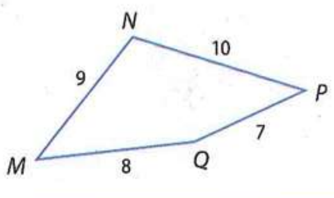
$22.5 = x$ الحل.

إذًا، فمحيط $PQRST$ يساوي 22.5.

### تمرين موجّه

**4.** إذا كان $MNPQ \sim XYZW$، فجد معامل مقياس $MNPQ$ إلى $XYZW$ ومحيط كل مضلع.



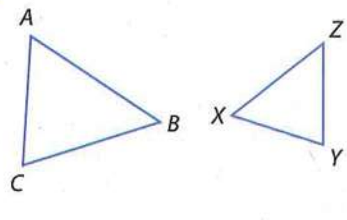




> **انتبه!**
> **المحيط** تذكر أن المحيط هو الإطار الخارجي المكون للشكل. تأكد من إيجاد مجموع أطوال جميع الأضلاع عند إيجاد محيط أي مضلع. ربما تحتاج لاستخدام العلامات الأخرى أو المبادئ الهندسية لإيجاد طول الأضلاع التي بدون علامة.

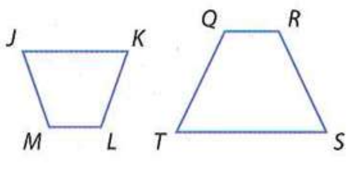
## التحقق من فهمك

**مثال 1** **أدرج قائمة بكل أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا مرتبطًا بالأضلاع المتناظرة لكل زوج من المضلعات المتشابهة.**

**1.** $\triangle ABC \sim \triangle ZYX$

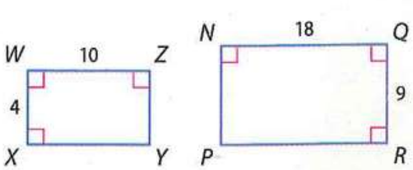



**2.** $JKLM \sim TSRQ$

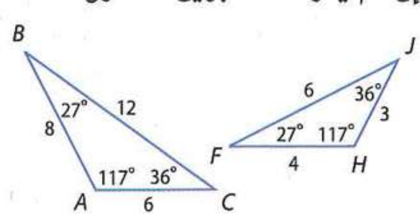



**مثال 2** **حدد ما إذا كان كل زوجين من الأشكال متشابهين. فإن كانا كذلك، اكتب عبارة التشابه ومعامل المقياس. وإن لم يكونا متشابهين، فاشرح استنتاجك.**

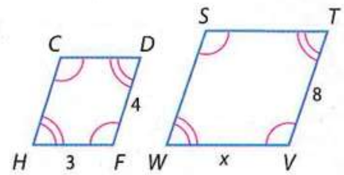
**3.**

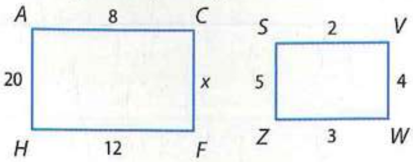



**4.**

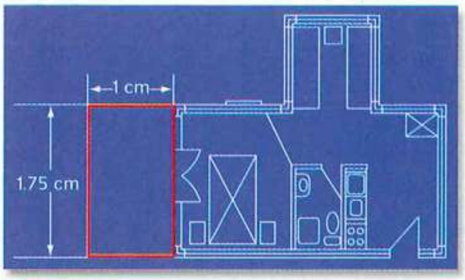


**مثال 3** **يتشابه كل زوجين من المضلعات التالية. فجـد قيمة $x$.**

5.


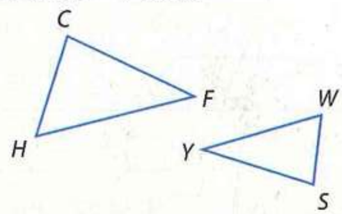

6.


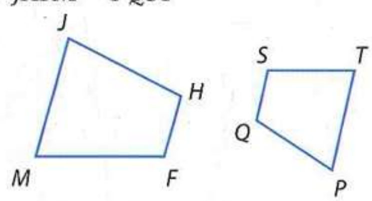

**مثال 4** 7. **تصميم** في مخطط الشقة السكنية الموضح أمامك، تبلغ قياسات الشرفة 1 cm عرضًا في 1.75 cm طولًا. إذا كان طول الشرفة الفعلي يساوي 7 m، فما هو محيط الشرفة الفعلي؟

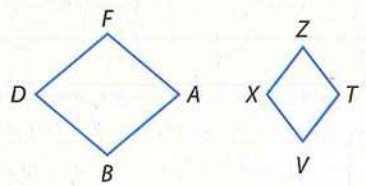


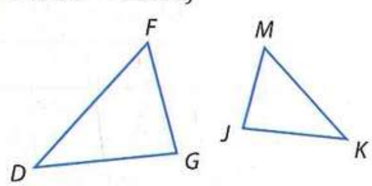

## التمرين وحل المسائل

**مثال 1** **أدرج قائمة بكل أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا مرتبطًا بالأضلاع المتناظرة لكل زوج من المضلعات المتشابهة.**

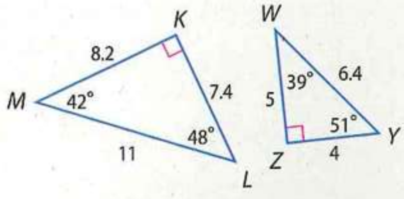
8. $\triangle CHF \sim \triangle YWS$


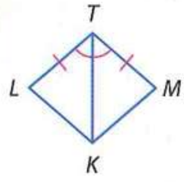

9. $JHFM \sim PQST$


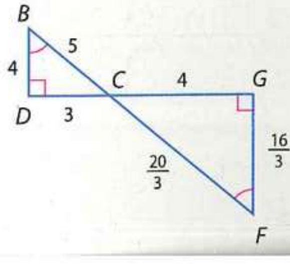

10. $ABDF \sim VXZT$


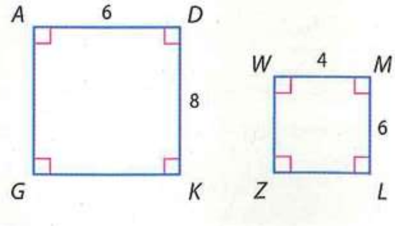

11. $\triangle DFG \sim \triangle KMJ$



**مثال 2** **فرضيات** **حدد ما إذا كان كل زوجين من الأشكال متشابهين. فإن كانا كذلك، اكتب عبارة التشابه ومعامل المقياس. وإن لم يكونا متشابهين، فاشرح استنتاجك.**

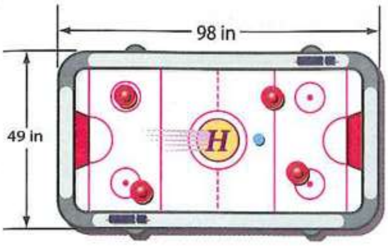
12.



13



14.



15.


**16.** **ألعاب** أبعاد ملعب الهوكي هي 160 ft في 200 ft. هل ملعب الهوكي وطاولة الهوكي الهوائي الموضحة في الشكل متشابهان؟ اشرح استنتاجك.

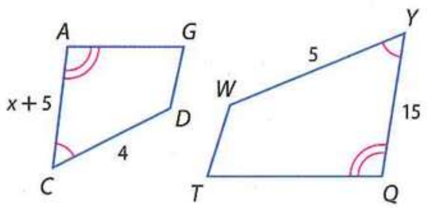



**17.** **أجهزة الكمبيوتر** أبعاد شاشة كمبيوتر مسطحة ذات 43.2 cm هي تقريبًا 33.7 cm في 27.3 cm. أبعاد شاشة كمبيوتر مسطحة ذات 48.3 cm هي تقريبًا 36.8 cm في 30.5 cm. لأقرب جزء من عشرة.

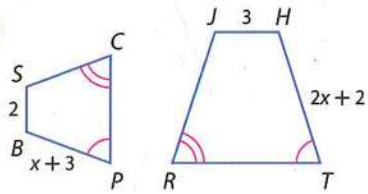
هل شاشتي الكمبيوتر متشابهتان؟ اشرح استنتاجك.

مثال 3 **الانتظام كل زوجين من المضلعات متشابهان. فجــد قيمة $x$.**

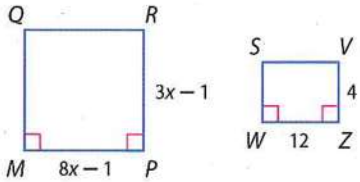
**18.**



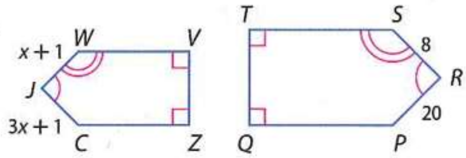

**19**




**20.**



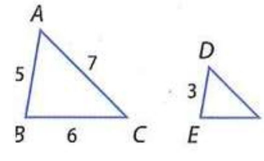

**21.**



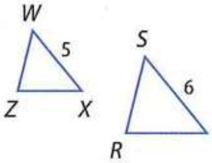

مثال 4 **22.** المستطيل $ABCD$ عرضه 8m وطوله 20m. المستطيل $QRST$، المتشابه مع المستطيل $ABCD$، يبلغ طوله 40m. جــد معامل المقياس للمستطيل ABCD إلى المستطيل $QRST$ ومحيط كل منهما.

**جــد محيط المثلث الموضح أمامك.**

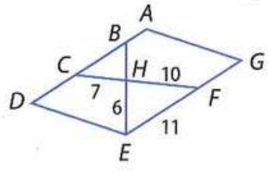
**23.** $\triangle DEF$، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
و $AB = 5$ و $BC = 6$ و $AC = 7$
و $DE = 3$



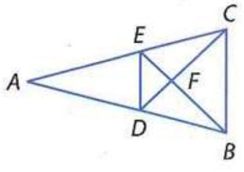

**24.** $\triangle WZX$، إذا كان $\triangle WZX \sim \triangle SRT$
و $ST = 6$ و $WX = 5$ ومحيط المثلث
$\triangle SRT = 15$




**25.** $\triangle CBH$، إذا كان $\triangle CBH \sim \triangle FEH$ و $ADEG$
متوازي أضلاع و $CH = 7$ و $FH = 10$
و $FE = 11$ و $EH = 6$




**26.** $\triangle DEF$، إذا كان $\triangle DEF \sim \triangle CBF$
ومحيط المثلث $\triangle CBF = 27$، $DF = 6$
و $FC = 8$

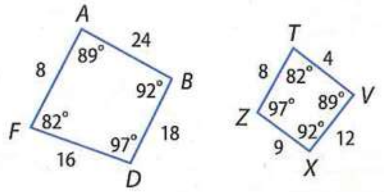



**27.** يبلغ معامل المقياس لمستطيلين متشابهين 4 : 2. إذا كان محيط المستطيل الأكبر 80 m. فجــد محيط المستطيل الأصغر.

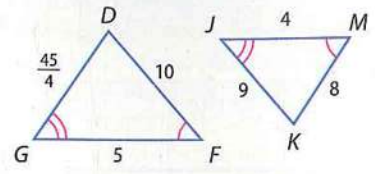
**28.** يبلغ معامل المقياس لمستطيلين متشابهين 2 : 3. إذا كان محيط المستطيل الأصغر 50 m. فجــد محيط المستطيل الأكبر.

أدرج قائمة بكل أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا مرتبطًا بالأضلاع المتناظرة.

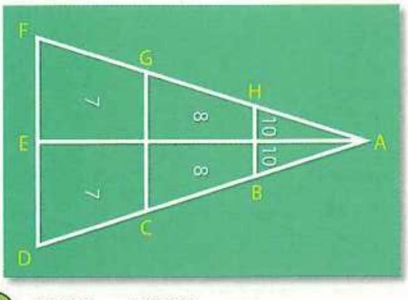
**29.**




**30.**




**لعبة لوح الخلط** ملعب شيفلبورد يشكل ثلاثة مثلثات متشابهة فيها $\angle AHB \cong \angle AGC \cong \angle AFD$. أمامك المعطيات، استخرج المتطابقات من الأضلاع المتناظرة أو الزوايا المتناظرة.




**31.** $\overline{AB}$

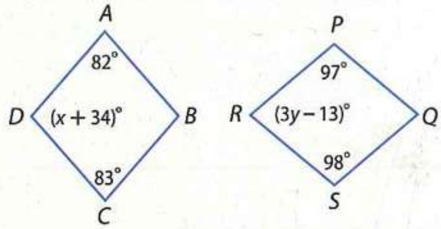
**32.** $\overline{FD}$

**33.** $\angle ACG$

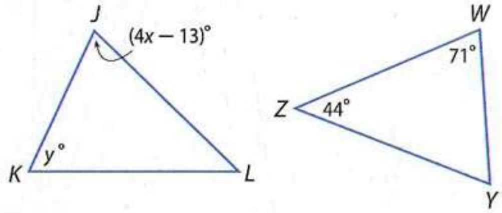
**34.** $\angle A$

جـد قيمة كل متغير.

**35** $ABCD \sim QSRP$




**36.** $\triangle JKL \sim \triangle WYZ$




**37.** **عرض الشرائح** تستخدم جهاز عرض رقمي لعرض الشرائح. الصور 13 in في $9\frac{1}{4}$ in على شاشة الكمبيوتر، ويبلغ معامل المقياس لصورة الكمبيوتر إلى الصورة المعروضة بجهاز العرض 4 :1. ما أبعاد الصورة المعروضة؟

**الهندسة التنسيقية** من الرؤوس التي أمامك، حدد ما إذا كان المستطيل $ABCD$ متشابه مع المستطيل $WXYZ$. علل إجابتك.

**38.** $A(-1, 5)$, $B(7, 5)$, $C(7, -1)$, $D(-1, -1)$;
$W(-2, 10)$, $X(14, 10)$, $Y(14, -2)$, $Z(-2, -2)$

**39.** $A(5, 5)$, $B(0, 0)$, $C(5, -5)$, $D(10, 0)$;
$W(1, 6)$, $X(-3, 2)$, $Y(2, -3)$, $Z(6, 1)$

**الفرضيات** حدد ما إذا كانت المضلعات المعطاة متشابهة *دائمًا* أم *أحيانًا* أم *ليست متشابهة على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

**40.** مثلثان منفرجا الزاوية

**41.** شبه منحرف ومتوازي أضلاع

**42.** مثلثان قائما الزاوية

**43.** مثلثان متساويا الساقين

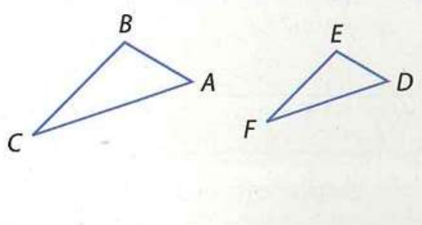
**44.** مثلث مختلف الأضلاع ومثلث متساوي الساقين

**45.** مثلثان متساويا الأضلاع

**46.** **البرهان** اكتب فقرة إثبات للنظرية 7.1

**المعطيات:** $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ و $\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

**المطلوب:** $\frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle DEF} = \frac{m}{n}$



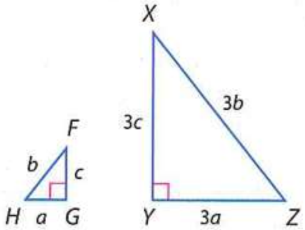
**47** **صور** تقوم بتكبير الصور الموضحة أمامك لعرضها في كتاب مدرستك السنوي. إذا كانت أبعاد الصورة الأصلية هي $2\frac{1}{3}$ in في $1\frac{2}{3}$ in ومعامل المقياس للصورة القديمة إلى الصورة الجديدة هو $2:3$. ما هي أبعاد الصورة الجديدة؟

**48.** **تغيير الأبعاد** المستطيل $QRST$ متشابه مع المستطيل $JKLM$ حيث النسبة بين الأضلاع $1:4$.

**a.** فما النسبة بين مساحتي المستطيلين؟

**b.** بفرض تضاعف بُعد كلا المستطيلين ثلاث مرات. فما النسبة الجديدة لطول أضلاع المستطيلين؟

**c.** ما نسبة مساحتي المستطيلين الكبيرين؟




**49.** **تغير الأبعاد** في الشكل التالي، $\triangle FGH \sim \triangle XYZ$.

**a.** وضح أن محيطات $\triangle FGH$ و $\triangle XYZ$ لها نفس النسبة مثل أضلاعها المتناظرة.

**b.** إذا تم إضافة 6 وحدات إلى أطوال كل ضلع، هل سيكون المثلثان الجديدان متشابهين؟ اشرح.

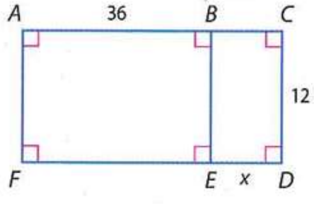
**50.** **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف التشابه في المربعات.

**a.** التمثيل الهندسي ارسم ثلاث مربعات مختلفة الأحجام. قم بتسميتها $ABCD$ و $PQRS$ و $WXYZ$. قِس وضع على كل مربع طول ضلعه.

**b.** **جدوليًا** احسب نسب الضلعين المتناظرين في كل زوجين من المربعات وسجلها في جدول: $ABCD$ و $PQRS$، $PQRS$ و $WXYZ$، $WXYZ$ و $ABCD$. هل كل زوجين من المربعات متشابهين؟

**c.** **لفظيًا** قم بالتخمين حول تشابه المربعات جميعها.

## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا




**51.** **التحدي** عند أي قيمة للعنصر $x$ يكون $EDCB \sim BEFA$؟

**52.** **التبرير** تذكر أن *علاقة التكافؤ* هي أي علاقة تتفق مع خصائص الانعكاس والتماثل والانتقال. هل التشابه هو علاقة تكافؤ؟ اشرح.

**53.** **مسألة غير محددة الإجابة** جـد مثالاً عكسيًا للعبارة التالية.

*كل المستطيلات متشابهة.*

**54.** **التبرير** ارسم شكلين للخماسي المنتظم مختلفين في القياس. هل الشكلان متشابهان؟ هل أي مضلعين منتظمين ولهما نفس عدد الأضلاع يتشابهان؟ اشرح.

**55.** **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك وصف العلاقة بين شكلين؟

## تدريب على الاختبار المعياري

**56. الجبر** إذا كان الوسط الحسابي للأعداد $4x$ و $3x$ و 12 يساوي 18، فما قيمة $x$؟

**A** 6 **C** 4

**B** 5 **D** 3

**57.** يبلغ معامل المقياس لمستطيلين متشابهين 5:3. محيط المستطيل الأكبر 65 m. فما محيط المستطيل الأصغر؟

**F** 29 m **H** 49 m

**G** 39 m **J** 59 m

**58. إجابة مختصرة** يحتوي صندوق على 25 قطعة معدنية من فذة الدرهم و 7 قطعًا من فئة الربع درهم، فما احتمال أن تكون القطعة المختارة من الصندوق عشوائيًا هي درهم؟

**59. SAT/ACT** إذا كان ضلع أحد المربعات هو $x + 3$. فما هو طول قطره؟

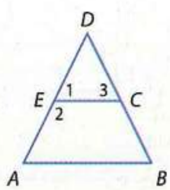
**A** $x^2 + 3$ **D** $x\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

**B** $3x + 3$ **E** $x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

**C** $2x + 6$

## مراجعة شاملة

**60. أجهزة الكمبيوتر** في إحدى الدراسات المسحية التي أُجريت على 5000 أسرة، وُجد أن 4200 أسرة كان لديهم على الأقل جهاز كمبيوتر واحد. ما هي نسبة الأسر التي لديها كمبيوتر إلى عدد الأسر جميعها؟




**61. إثبات اكتب برهانًا تسلسليًا.**

**المعطيات:** $E$ و $C$ هي نقطتا منتصف $\overline{AD}$ و $\overline{DB}$.
$\overline{AD} \cong \overline{DB}, \angle A \cong \angle 1$

**المطلوب:** $ABCE$ هو عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين.

**62. الهندسة الإحداثية** حدّد إحداثيات تقاطعات أقطار $\square JKLM$ الذي رؤوسه هي $J(2, 5)$ و $K(6, 6)$ و $L(4, 0)$ و $M(0, -1)$.

**اذكر الافتراض الذي ستبدأ به البرهان غير المباشر لكل عبارة.**

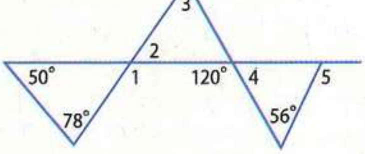
**63.** إذا كان $3x > 12$، فإن $x > 4$.

**64.** $PQ \cong \overline{ST}$

**65.** منصف زاوية الرأس في المثلث متساوي الساقين هو أيضًا ارتفاع للمثلث.

**66.** إذا كان العدد النسبي هو أي عدد يمكن التعبير عنه بالصورة $\frac{a}{b}$، حيث $a$ و $b$ هما عددان صحيحان و $b \neq 0$، فإن 6 هو عدد نسبي.

**جـد قياسات جميع الزوايا المرقمة.**




**67.** $m\angle 1$

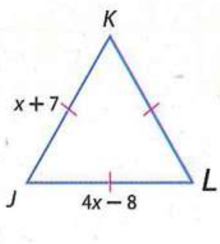
**68.** $m\angle 2$

**69.** $m\angle 3$

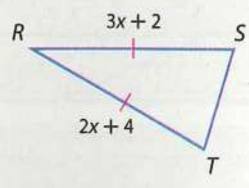
## مراجعة المهارات

**الجبر** جـد قيمة $x$ وقياسات أطوال الأضلاع المجهولة لكل مثلث.

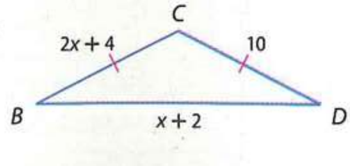
**70.**




**71.**




**72.**

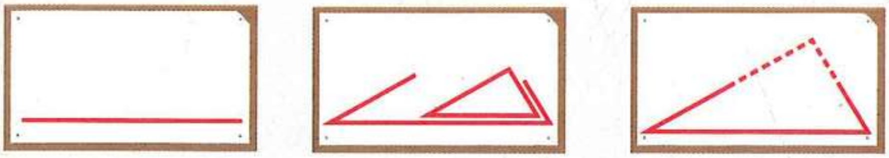


# 7-3 المثلثات المتشابهة

**السابق:**
- لقد استخدمت نظريات تطابق (زاوية-زاوية-ضلع)، (ضلع-ضلع-ضلع)، (ضلع-زاوية-ضلع) لإثبات تطابق المثلثات.

**الحالي:**
1. تحديد المثلثات المتشابهة باستخدام مسلّمة تشابه مثلثين من خلال تساوي زاويتين متناظرتين فيهما ونظرية التشابه (ضلع-ضلع-ضلع) ونظرية التشابه (ضلع-زاوية-ضلع).
2. استخدام المثلثات المتشابهة لحل المسائل.

**لماذا؟**
- يرغب أيمن في رسم نسخة مشابهة لشعار نادي التزلج المشترك فيه على ملصق إعلاني. رسم في البداية خطًا مستقيمًا في أسفل الملصق. بعد ذلك، استخدم قصاصة للشعار الأصلي لعمل نسختين للزاويتين السفليتين. وأخيرًا، مدّ الجوانب غير المشتركة للزاويتين.



**ممارسات في الرياضيات**
استخدام نماذج الرياضيات.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

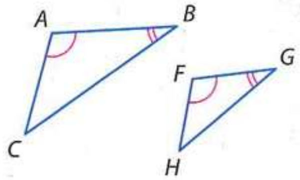
## 1 تحديد المثلثات المتشابهة

يشير المثال إلى تشابه المثلثين إذا تطابق زوجان من الزوايا المتناظرة.

### مسلّمة 7.1 تشابه زاوية-زاوية (AA)

إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثات مع زاويتين في مثلث آخر، فإذًا يكون المثلثان متشابهين.

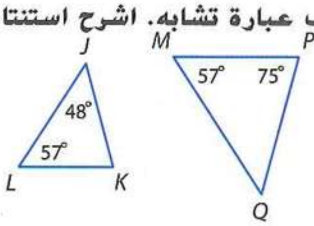
**مثال** إذا كان $\angle A \cong \angle F$ و $\angle B \cong \angle G$، فإذًا $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.



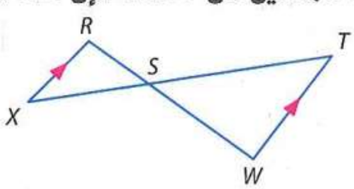

### مثال 1 استخدام مسلّمة تشابه زاوية-زاوية

**بيّن تشابه المثلثين من عدمه. فإن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. اشرح استنتاجك.**

**a.**




**b.**

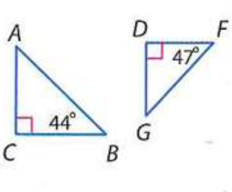



**a.** بما أن $m\angle L = m\angle M$، فإن $\angle L \cong \angle M$. حسب نظرية مجموع زوايا المثلث، فإن $57 + 48 + m\angle K = 180$، إذًا $m\angle K = 75$. بما أن $m\angle P = 75$، فإن $\angle K \cong \angle P$. إذًا، $\triangle LJK \sim \triangle MQP$ حسب تشابه زاوية-زاوية.

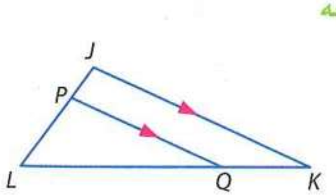
**b.** $\angle RSX \cong \angle WST$ حسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس. بما أن $\overline{RX} \parallel \overline{TW}$، $\angle R \cong \angle W$. فإذًا، $\triangle RSX \sim \triangle WST$ حسب تشابه زاوية-زاوية.

**تمرين موجّه**

**1A.**

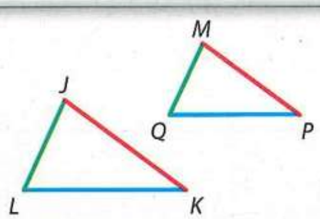



**1B.**



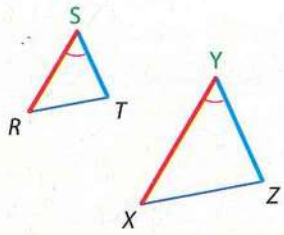
يمكنك استخدام مسلّمة التّشابه (زاوية-زاوية) لإثبات النظريتين التاليتين.

**نظريتا تشابه المثلثات**




**7.2 تشابه ضلع-ضلع-ضلع (SSS)**
إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين متناسبة، فإذًا المثلثان متشابهان.

**مثال** إذا كان $\frac{JK}{MP} = \frac{KL}{PQ} = \frac{LJ}{QM}$، فإن $\triangle JKL \sim \triangle MPQ$.




**7.3 تشابه ضلع-زاوية-ضلع (SAS)**
إذا كانت أطوال ضلعين في مثلث متناسبة مع أطوال الضلعين المتناظرين في مثلث آخر والزاويتين المحصورة بينهما متطابقة، فإن المثلثات تكون متشابهة.

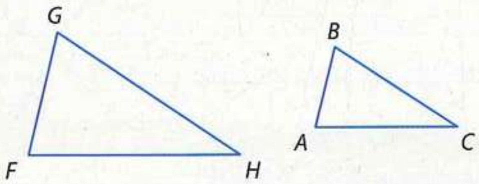
**مثال** إذا كان $\frac{RS}{XY} = \frac{ST}{YZ}$ و $\angle S \cong \angle Y$، فإن $\triangle RST \sim \triangle XYZ$.

سوف تثبت النظرية 7.3 في التمرين 25.

**برهان النظرية 7.2**

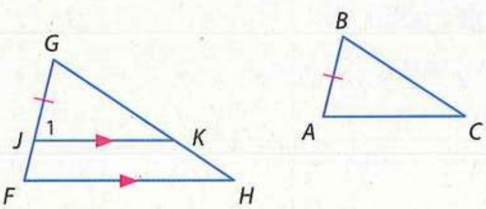
**المعطيات:** $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH}$

**المطلوب:** $\triangle ABC \sim \triangle FGH$




**نصيحة دراسية**
**الأضلاع المتناظرة** لتحديد الأضلاع المتناظرة في مثلثين، ابدأ بمقارنة أطول الأضلاع، ثم الذي يليه طولًا، وأخيرًا قارن بين أقصر الأضلاع طولًا.

**فقرة البرهان:**




حدد $J$ على $\overline{FG}$ بحيث $JG = AB$.
ارسم $\overline{JK}$ بحيث $\overline{JK} \parallel \overline{FH}$.
قم بتسمية $\angle GJK$ باسم $\angle 1$.

بما أن $\angle G \cong \angle G$ حسب خاصية الانعكاس و $\angle 1 \cong \angle F$ حسب مسلّمة الزوايا المتناظرة، فإن $\triangle GJK \sim \triangle GFH$ حسب مسلّمة تشابه زاوية-زاوية.

وحسب تعريف المضلعات المتشابهة، $\frac{JG}{FG} = \frac{GK}{GH} = \frac{JK}{FH}$. وبالتعويض،

$$\frac{AB}{FG} = \frac{GK}{GH} = \frac{JK}{FH}.$$

وبما أن المعطيات تقول أيضًا إن $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH}$، يمكننا القول إن $\frac{GK}{GH} = \frac{BC}{GH}$ و $\frac{JK}{FH} = \frac{AC}{FH}$. وهذا يعني أن $GK = BC$ و $JK = AC$. إذًا $\overline{GK} \cong \overline{BC}$ و $\overline{JK} \cong \overline{AC}$.

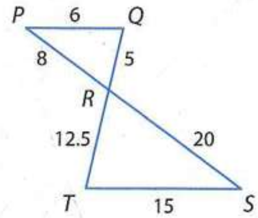
حسب تشابه ضلع-ضلع-ضلع، $\triangle ABC \cong \triangle JGK$.

حسب المسلّمة التي تقول بتطابق الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة، فإن $\angle B \cong \angle G$ و $\angle A \cong \angle 1$. بما أن $\angle 1 \cong \angle F$، $\angle A \cong \angle F$ باستخدام خاصية التعدي. إذًا، حسب تشابه AA، فإن $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

## مثال 2 استخدام نظريات تشابه مثلثين من خلال تشابه ضلع-ضلع-ضلع (SSS) وتشابه ضلع-زاوية-ضلع (SAS)

**بيّن تشابه المثلثين من عدمه. إن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. اشرح استنتاجك.**

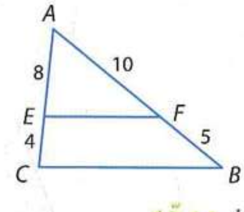
**.a**




$\frac{PR}{SR} = \frac{8}{20}$ أو $\frac{2}{5}$ و $\frac{PQ}{ST} = \frac{6}{15}$ أو $\frac{2}{5}$ و $\frac{QR}{TR} = \frac{5}{12.5} = \frac{50}{125}$

أو $\frac{2}{5}$ إذًا، $\triangle PQR \sim \triangle STR$ حسب نظرية تشابه ضلع-ضلع-ضلع.

**.b**



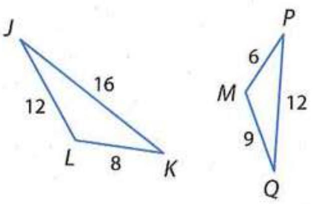

حسب خاصية الانعكاس، $\angle A \cong \angle A$.

$\frac{AF}{AB} = \frac{10}{10+5} = \frac{10}{15}$ أو $\frac{2}{3}$ و $\frac{AE}{AC} = \frac{8}{8+4} = \frac{8}{12}$ أو $\frac{2}{3}$ و $\frac{2}{3}$.

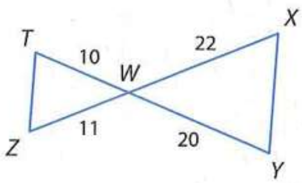
بما أن أطوال الأضلاع التي تتضمن الزاوية $\angle A$ متناسبة، فإن $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ حسب تشابه SAS.

**تمرين موجّه**

**2A.**




**2B.**



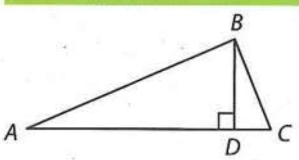

**نصيحة دراسية**

**رسم الأشكال التخطيطية** من المفيد لك أن تعيد رسم المثلثات المتشابهة حتى يكون لأطوال الأضلاع المتناظرة نفس الاتجاه.

تستطيع أن تقرر ما يكفي لإثبات تشابه المثلثين.

## مثال 3 من الحياة اليومية شروط كافية

**في الشكل، $\angle ADB$ زاوية قائمة.**
**أيٌّ من التالي لن يكون كافيًا لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle CDB$؟**




**A** $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$

**B** $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CD}$

**C** $\angle ABD \cong \angle C$

**D** $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{BC}$

### قراءة فقرة الاختبار

أمامك معطيات تقول إن $\angle ADB$ زاوية قائمة وطُلِب منك تحديد أيًا من المعلومات الإضافية لن تكون كافيةً لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle CDB$.

### حَل فقرة الاختبار

بما أن $\angle ADB$ هي زاوية قائمة، فإن $\angle CDB$ هي أيضًا زاوية قائمة. وبما أن كل الزوايا القائمة متطابقة، إذًا $\angle ADB \cong \angle CDB$. راجع كل الخيارات حتى تجد أحدها لا يقدم شرطًا إضافيًا يكفي لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle CDB$.

**الخيار A:** إذا كان $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$ و $\angle ADB \cong \angle CDB$. فإذًا $\triangle ADB \sim \triangle CDB$ حسب نظرية تشابه ضلع-زاوية-ضلع.

**الخيار B:** إذا كان $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CD}$ و $\angle ADB \cong \angle CDB$، فإذًا لا يمكننا استنتاج أن $\triangle ADB \sim \triangle CDB$ لأن الزاوية المحصورة بين الضلع $\overline{AB}$ والضلع $\overline{BD}$ لا تكون $\angle ADB$. إذًا، الإجابة الصحيحة هي **B**.

**نصيحة عند حل الاختبار**

**تحديد أمثلة خارجة عن التعريف**
أحيانًا تتطلب أسئلة الاختبار منك أن تذكر مثالًا خارجًا عن التعريف، كما في هذه الحالة. عندها لا بد من التحقق من كل خيارٍ حتى تعثر على مثالٍ يصلح أن يكون خارجًا عن التعريف. لو أردت التحقق من صحة إجابتك، تأكد من أن كل الخيارات الأخرى صحيحة.

**تمرين موجّه**

**3.** إذا كان $\triangle JKL$ و $\triangle FGH$ مثلثين فيهما $\angle J \cong \angle F$، فأيٌّ من الآتي يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهين؟

**F** $\frac{KL}{GH} = \frac{JL}{FH}$ **G** $\frac{JL}{JK} = \frac{FH}{FG}$ **H** $\frac{JK}{FG} = \frac{KL}{GH}$ **J** $\frac{JL}{JK} = \frac{GH}{FG}$

## 2 استخدام المثلثات المتشابهة

كما هو الحال في تطابق المثلثات، فإن تشابه المثلثات يكون انعكاسيًا، ومتناظرًا، ومتعديًا.

### نظرية 7.4 خواص التشابه

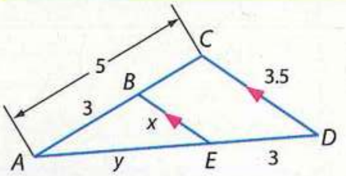
**خاصية انعكاس التشابه** $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

**خاصية تناظر التشابه** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$، فإن $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

**خاصية التعدي في التشابه** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ و $\triangle DEF \sim \triangle XYZ$.
فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

سوف تثبتُ النظرية 7.4 في التمرين 26.

### مثال 4 أجزاء المثلثات المتشابهة




**جـد $BE$ و $AD$.**

بما أن $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ و $\angle ABE \cong \angle BCD$ و $\angle AEB \cong \angle EDC$ لأنها زوايا متناظرة. إذًا، حسب تشابه AA، فإن $\triangle ABE \sim \triangle ACD$.

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$ تعريف المضلعات المتشابهة

$\frac{3}{5} = \frac{x}{3.5}$ $AC = 5, CD = 3.5, AB = 3, BE = x$

$3.5 \cdot 3 = 5 \cdot x$ خاصية نواتج الضرب التبادلي

$2.1 = x$ $BE = 2.1$.

$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$ تعريف المضلعات المتشابهة

$\frac{5}{3} = \frac{y+3}{y}$ $AC = 5, AB = 3, AD = y + 3, AE = y$

$5 \times y = 3(y + 3)$ خاصية نواتج الضرب التبادلي

$5y = 3y + 9$ خاصية التوزيع

$2y = 9$ اطرح $3y$ من كل طرف

$y = 4.5$ $AD = y + 3 = 7.5$.

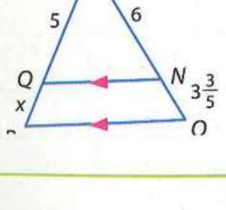
**نصيحة دراسية**

**التناسبات** تناسب إضافي ينطبق على مثال 4 هو $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BE}$.

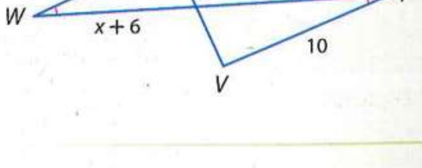
**تمرين موجّه**

**جـد قياس كل مما يلي.**

**4A.** $QP$ و $MP$



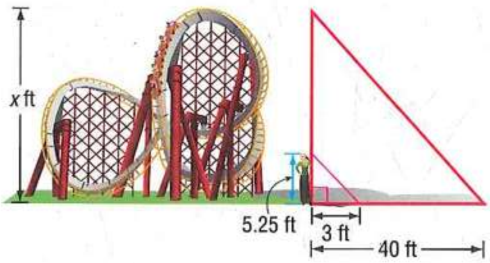

**4B.** $WR$ و $RT$



## مثال 5 من الحياة اليومية القياس غير المباشر

**الأفعوانية تقدّر فاطمة ارتفاع لعبة الأفعوانية العملاقة. يبلغ طول فاطمة 5.25 ft وبلغ طول ظلها 3 ft. فإذا كان طول ظل هذه اللعبة هو 40 ft، فكم يبلغ طولها؟**

**الاستيعاب** جهّز رسمًا تصويريًا لهذه الحالة. 5 ft و 3 in تساوي 5.25 ft.




**التخطيط** في مسائل الظل، يمكنك أن تفترض أن الزوايا المتكونة من أشعة الشمس مع أي شيئين آخرين تكون متطابقة وأن الشيئين يشكلان أضلاع مثلثين قائمي الزاوية.

وبتطابق أربعة أزواج من الزوايا، فالمثلثات القائمة تتشابه وفقًا لمسلمة تشابه AA . إذًا، يمكننا كتابة التناسب التالي.

$$\frac{\text{ارتفاع فاطمة}}{\text{ارتفاع اللعبة}} = \frac{\text{طول ظل فاطمة}}{\text{طول ظل اللعبة}}$$

**الحل** عوّض عن القيم المعروفة وافرض أن $x$ = ارتفاع اللعبة.

$\frac{5.25}{x} = \frac{3}{40}$ بالتعويض

$3 \times x = 40(5.25)$ خاصية نواتج الضرب التبادلي

$3x = 210$ بسّط

$x = 70$ اقسم كل طرف على 3

يبلغ طول لعبة الأفعوانية 70 ft.

**التحقق** يبلغ طول ظل اللعبة $\frac{40 \text{ ft}}{3 \text{ ft}}$ أو حوالي 13.3 مرة من طول ظل فاطمة. تحقق أن ارتفاع اللعبة يصل إلى حوالي 13.3 مرة من طول فاطمة. $\frac{70 \text{ wft}}{5.25 \text{ ft}} \approx 13.3$ ✔

**نصيحة لحل المسائل**

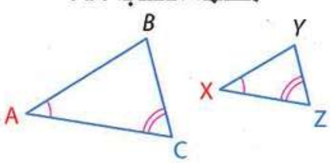
**إجابات منطقية** عندما تحل مسألةً، راجع إجاباتك للتحقق من صحتها. في هذا المثال، يبلغ طول ظل فاطمة أكثر قليلًا من نصف طولها. ويبلغ طول ظل اللعبة أيضاً أكثر بقليل من نصف الطول الذي استنتجته بحساباتك. إذًا، تكون الإجابة منطقية.

**تمرين موجّه**

**5. مباني** يقف جاسم بجوار مبنى. يبلغ طول جاسم 6 ft وطول ظله 9 ft. فإذا كان طول ظل هذا المبنى هو 322.5 ft، فكم يبلغ ارتفاع المبنى؟

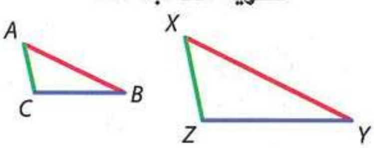
## ملخص المفاهيم تشابه المثلثات

**مسلمة التشابه AA**



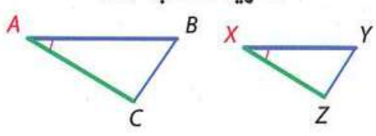

إذا كان $\angle A \cong \angle X$ و $\angle C \cong \angle Z$،
فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

**نظرية التشابه SSS**




إذا كان $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$،
فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

**نظرية التشابه SAS**

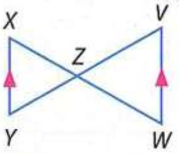



إذا كان $\angle A \cong \angle X$ و $\frac{AB}{XY} = \frac{CA}{ZX}$،
فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

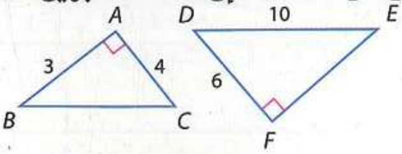
## التحقق من فهمك

**المثالان 1 و 2** **بيّن تشابه المثلثين من عدمه. فإن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. اشرح استنتاجك.**

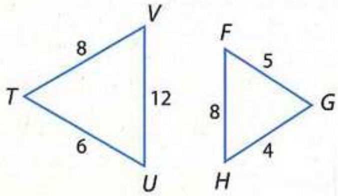
**1.**



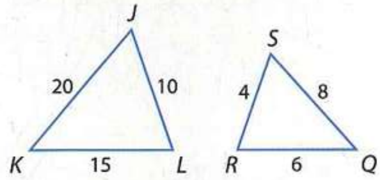

**2.**



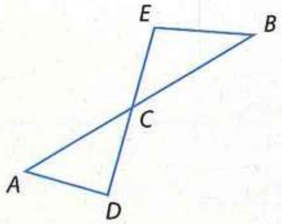

**3.**




**4.**




**مثال 3** **5. اختيار من متعدد** في الشكل، $\overline{AB}$ يتقاطع مع $\overline{DE}$ عند النقطة $C$. ما المعلومات الإضافية التي ستكون كافية للبرهنة على أن $\triangle ADC \sim \triangle BEC$؟




**A** $\angle DAC$ و $\angle ECB$ متطابقتان.

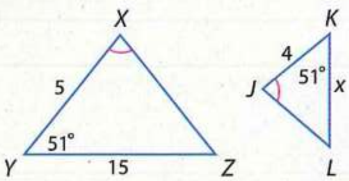
**B** $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ متطابقتان.

**C** $\overline{AD}$ و $\overline{EB}$ متوازيان.

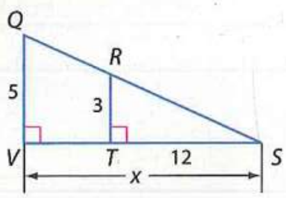
**D** $\angle CBE$ هي زاوية قائمة.

**مثال 4** **إنشاء حدد المثلثات المتشابهة. جد قياس كل مما يلي.**

**6.** $KL$




**7.** $VS$

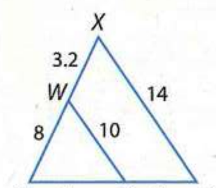



**مثال 5** **8. اتصالات** يلقي برج هواتف خلوية بظلٍّ يبلغ طوله 100 ft. وفي الوقت نفسه يوجد عمودٌ قائمٌ بجوار البرج يبلغ ارتفاعه 4 ft و 6 in، ويلقي ظلًّا طوله 3 ft و 4 in. جــد ارتفاع البرج.

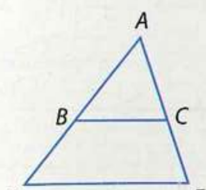
## التمرين وحل المسائل

**الأمثلة 3–1** **بيّن تشابه المثلثين من عدمه. فإن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. وإن لم يكونا متشابهين، فما الشروط التي تكفي لإثبات تشابه المثلثين؟ اشرح استنتاجك.**

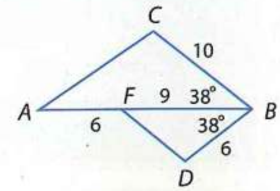
**9.**




**10.**

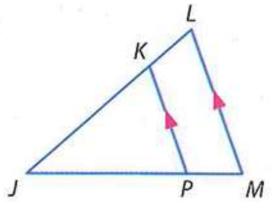



**11**

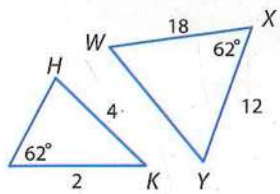


**الأمثلة 3-1** **بيّن تشابه المثلثين من عدمه. فإن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. وإن لم يكونا متشابهين، فما الشروط التي تكفي لإثبات تشابه المثلثين؟ اشرح استنتاجك.**

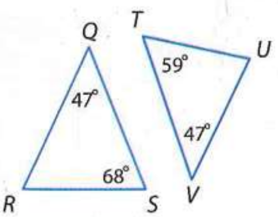
**12.**



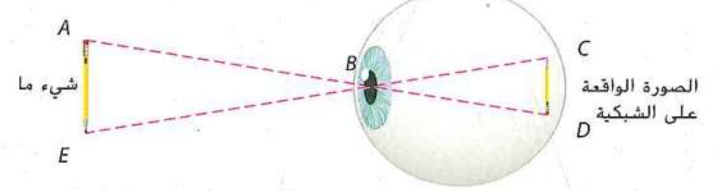

**13.**




**14.**

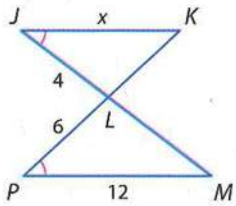



**15.** **استخدام النماذج** عندما ننظر إلى شيء ما، فإنه يقع على شبكية العين عبر بؤبؤ العين. والمسافة من بؤبؤ العين إلى أعلى وأسفل هذا الشيء متطابقة، والمسافة من البؤبؤ إلى أعلى وأسفل الصورة الواقعة على الشبكية متطابقة. فهل المثلثات المتكونة بين الشيء وبؤبؤ العين وبين الشيء وصورته على الشبكية متشابهة؟ اشرح استنتاجك.

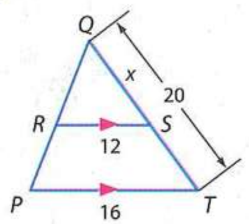



**مثال 4** **الجبر** **حدد المثلثات المتشابهة. ثم جد جميع القياسات.**

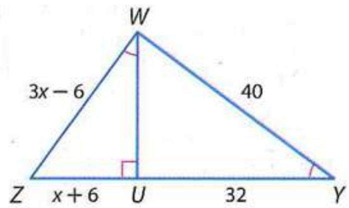
**16.** *JK*



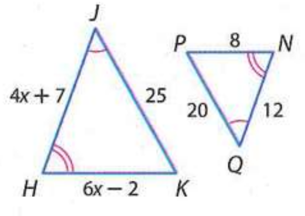

**17** *ST*



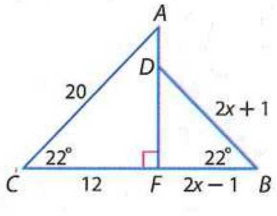

**18.** *WZ, UZ*



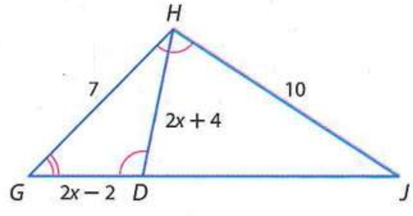

**19.** *HJ, HK*




**20.** *DB, CB*



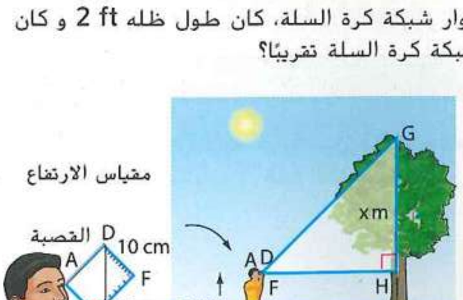

**21.** *GD, DH*




**مثال 5** **22.** **تماثيل** تقف ريهام بجوار تمثال في الحديقة. فإذا كان طول ريهام 5 ft، وظلها 3 ft، وظل التمثال $10\frac{1}{2}$ ft فما هو طول التمثال؟

**23.** **ألعاب رياضية** عندما وقف خالد، والذي يبلغ طوله 5 ft و 11 in بجوار شبكة كرة السلة، كان طول ظله 2 ft و كان طول ظل شبكة كرة السلة يصل إلى 4 ft و 4 in. فكم يبلغ ارتفاع شبكة كرة السلة تقريبًا؟

**24.** **إدارة الغابات** يمكن استخدام مقياس الارتفاع هذا الموضح أمامك في تقدير ارتفاع الأشجار. نظر عمرو عبر قصبة الجهاز إلى قمة الشجرة ودوّن قراءة الجهاز. جـد ارتفاع الشجرة.



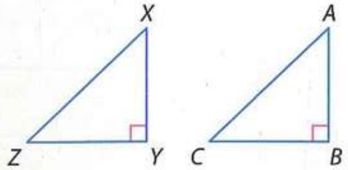

**البرهان** **اكتب برهانًا من عمودين.**

**25.** النظرية 7.3 **26.** النظرية 7.4

**البرهان** اكتب برهانًا من عمودين.

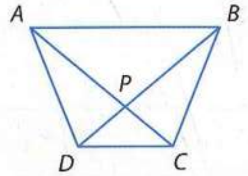
27. **المعطيات:** $\triangle XYZ$ و $\triangle ABC$ مثلثان قائما الزاوية؛ $\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}$.

**المطلوب:** $\triangle YXZ \sim \triangle BAC$

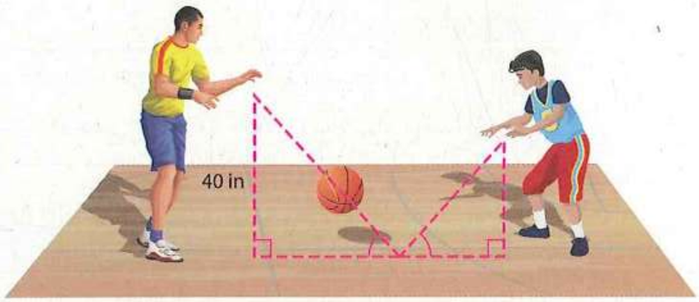



28. **المعطيات:** $ABCD$ عبارة عن شبه منحرف.

**المطلوب:** $\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$




29. **استخدام النماذج** عندما مرر والد مهند كرة السلة إليه، كانت الزوايا التي كونها مسار الكرة متطابقة. هبطت الكرة على الأرض $\frac{2}{3}$ المسافة بينهما قبل أن ترتد للأعلى مرةً أخرى. فإذا أطلق والد مهند الكرة من ارتفاع **40 in** فوق الأرض، احسب الارتفاع الذي أمسك مهند عنده الكرة؟

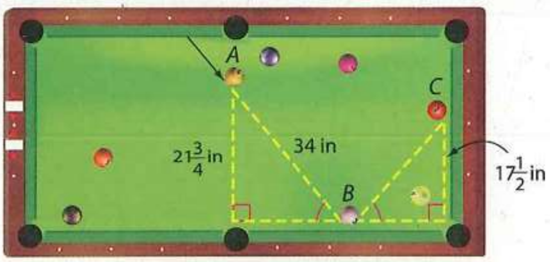



**الهندسة الإحداثية** $\triangle XYZ$ و $\triangle WYV$ رؤوسهما هي $X(-1, -9)$، $Y(5, 3)$، $Z(-1, 6)$، $W(1, -5)$ و $V(1, 5)$

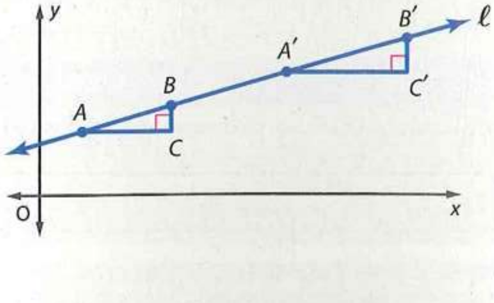
30. ارسم المثلثات، وبرهن أن $\triangle XYZ \sim \triangle WYV$.

31. أوجِد النسبة بين محيطي المثلثين.

32. **لعبة البلياردو** عندما تنحرف كرة على سطح أملس، فإن الزوايا الناتجة من مسارها تكون متطابقة. ضرب معاذ الكرة البرتقالية فاتخذت المسار من $A$ إلى $B$ إلى $C$ كما هو مبين بالأسفل. ما المسافة الكلية التي قطعتها الكرة منذ أن ضربها معاذ حتى وصلت إلى الجيب في نهاية الطاولة؟




33. **برهان** استخدم المثلثات المتشابهة لتبين أن ميل المستقيم المار بالنقطتين على هذا الخط يكون ثابتًا. إذا كانت النقاط $A$ و $B$ و $A'$ و $B'$ تقع على المستقيم $\ell$، فاستخدم المثلثات المتشابهة لإثبات أن ميل المستقيم من $A$ إلى $B$ مساوٍ لميل المستقيم من $A'$ إلى $B'$.

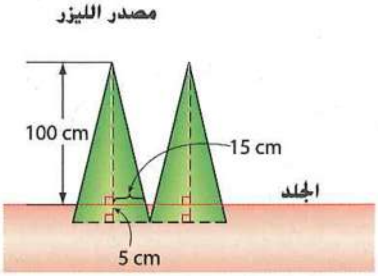


**34. تغير الأبعاد** بفرض أن $\triangle ABC \sim \triangle JKL$.

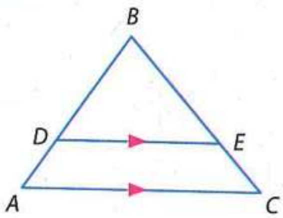
**a.** إذا كانت أطوال أضلاع المثلث $\triangle JKL$ نصف طول أضلاع المثلث $\triangle ABC$، ومساحة المثلث $\triangle ABC$ تساوي $40\ cm^2$، فما مساحة المثلث $\triangle JKL$؟ ما العلاقة بين المساحة ومعامل مقياس $\triangle ABC$ إلى $\triangle JKL$؟

**b.** إذا كانت أطوال أضلاع المثلث $\triangle ABC$ ثلاثة أضعاف طول أضلاع المثلث $\triangle JKL$، ومساحة المثلث $\triangle ABC$ تساوي $63\ cm^2$، فما مساحة المثلث $\triangle JKL$؟ ما العلاقة بين المساحة ومعامل مقياس $\triangle ABC$ إلى $\triangle JKL$؟

**35. الطب** بعض طرق العلاج الطبي تتضمن استخدام أشعة الليزر التي تتلامس مع الجلد وتخترقه ، مكونةً مثلثات متشابهة. راجع الرسم التخطيطي الموجود على اليسار. ما المسافات التي يجب وضع مصادر الليزر عندها لضمان أن المساحات التي يتم علاجها بكل مصدر لا تتداخل؟




**36. التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقات المتناسبة في المثلثات.



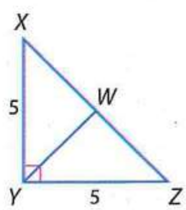

**a. التمثيل الهندسي** ارسم $\triangle ABC$ به $\overline{DE}$ موازٍ للضلع $\overline{AC}$ كما هو موضح على اليسار.

**b. جدوليًا** قِس وسجّل أطوال القطع المستقيمة $AD$ و $DB$ و $CD$ و $EB$ والنسبتين $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{CE}{EB}$ في جدول.

**c. لفظيًا** قم بعمل تخمين حول القطع المستقيمة التي أنشأها خط مستقيم موازٍ لأحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين.

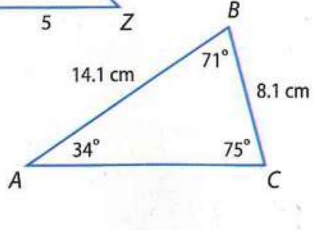
## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

**37. الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين مسلمة تشابه(AA (Similarity Postulate ونظرية تشابه SSS (Similarity Theorem) ونظرية تشابه (SAS (Similarity Theorem .




**38. تحدٍ** $\overline{YW}$ هو ارتفاع بالمثلث $\triangle XYZ$. جد $YW$.

**39. التبرير** زوجان من مثلثين متشابهين لهما قياسات الزوايا $50°$ و $85°$ و $45°$. قياسات أضلاع أحد المثلثين هي 3 و 3.25 و 4.23 وحدات، وأضلاع المثلث الآخر هي $x - 0.46$ و $x$ و $x + 1.81$ وحدات. جد قيمة $x$.




**40. سؤال غير محدد الإجابة** ارسم مثلثًا مشابهاً للمثلث $\triangle ABC$ الموضح أمامك. واشرح كيف تعرف أن إجابتك صحيحة.

**41. الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك اختيار مقياس مناسب؟

## تدريب على الاختبار المعياري

**42. الاحتمالات** $\frac{x!}{(x-3)!} =$

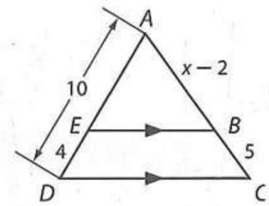
A $3.0$

B $0.33$

C $x^2 - 3x + 2$

D $x^3 - 3x^2 + 2x$

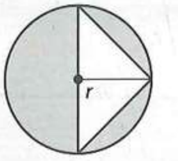
**43. إجابة موسعة** في الشكل أدناه، $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$.




**a.** اكتب تناسبًا يمكن استخدامه لإيجاد $x$.

**b.** جـــد قيمة $x$ وقياس $\overline{AB}$.

**44. الجبر** ما متعددة الحدود التي تمثل مساحة المنطقة المظللة؟




F $\pi r^2$

G $\pi r^2 + r^2$

H $\pi r^2 + r$

J $\pi r^2 - r^2$

**45. SAT/ACT** حجم مجسم مستطيل الشكل يساوي $16x$ وحدة مكعبة. إذا كانت أبعاد المجسم أعدادًا صحيحةً $x$ و $y$ و $z$ من الوحدات، فما هي أكبر قيمة ممكنة للبعد $z$؟

A 32

B 16

C 8

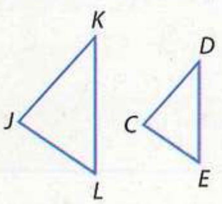
D 4

E 2

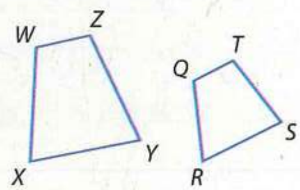
## مراجعة شاملة

**أدرج قائمة بكل أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا مرتبطًا بالأضلاع المتناظرة لكل زوج من المضلعات المتشابهة.**

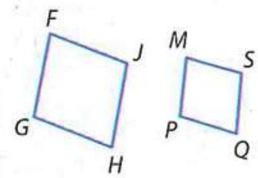
**46.** $\triangle JKL \sim \triangle CDE$




**47.** $WXYZ \sim QRST$




**48.** $FGHJ \sim MPQS$




**حُلّ كلاً من التناسبات التالية.**

**49.** $\frac{3}{4} = \frac{x}{16}$

**50.** $\frac{x}{10} = \frac{22}{50}$

**51.** $\frac{20.2}{88} = \frac{12}{x}$

**52.** $\frac{x-2}{2} = \frac{3}{8}$

**53. مربع اللغز الصيني** يتكون جهاز التانجرام من سبع قطع: مربع صغير، مثلثين صغيرين قائمي الزاوية ومتطابقين، مثلثين كبيرين قائمي الزاوية ومتطابقين، مثلث متوسط الحجم قائم الزاوية، وشكل رباعي. كيف يمكنك تحديد الشكل الرباعي؟ اشرح.

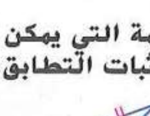
**حدد المسلّمة التي يمكن استخدامها للبرهنة على أن المثلثين متطابقان. عند تعذر إثبات التطابق، فاكتب لا يمكن.**

**54.**



**55.**

**56.**



## مراجعة المهارات

**اكتب برهانًا من عمودين.**

**57. المعطيات:** $r \parallel t$؛ $\angle 5 \cong \angle 6$

**المطلوب:** $\ell \parallel m$

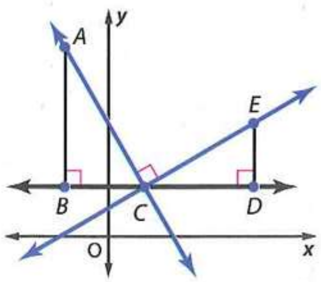
# 7-3 مختبر الهندسة
# براهين المستقيمات المتعامدة والمستقيمات المتوازية

لقد علمت أن المستقيمين اللذين ليسا أفقيين أو ليسا رأسيين يكونان متعامدين فقط في حالة إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي 1. في هذا النشاط، ستستخدم مثلثات متشابهة في إثبات النصف الأول من هذه النظرية: إذا كان هناك مستقيمان متعامدان فإن ناتج ضرب ميليهما يساوي 1.

## النشاط 1 المستقيمات المتعامدة

**المعطيات:** ميل $\overleftrightarrow{AC} = m_1$ وميل $\overleftrightarrow{CE} = m_2$ و $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CE}$

**المطلوب:** $m_1 m_2 = -1$




**الخطوة 1** في المستوى الإحداثي، قم بإنشاء $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CE}$ وإنشاء القاطع $\overleftrightarrow{BD}$ موازيًا للمحور الأفقي $x$ مارًا بالنقطة $C$. ثم قم بإنشاء المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ بحيث يكون الوتر هو $\overline{AC}$ والمثلث القائم الزاوية $\triangle EDC$ بحيث يكون الوتر هو $\overline{CE}$. من المفترض أن تتوازى سيقان كلا المثلثين مع المحورين الأفقي $x$ والرأسي $y$ كما هو موضح.

**الخطوة 2** جـد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{CE}$.

**ميل $\overleftrightarrow{CE}$**

$m_2 = \dfrac{\text{الارتفاع}}{\text{الإزاحة}}$ قانون الميل

$= \dfrac{DE}{CD}$ الارتفاع $= DE$، الإزاحة $= CD$

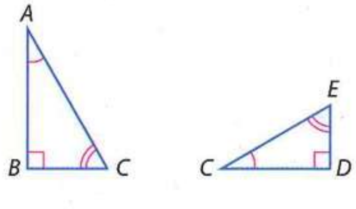
**ميل $\overleftrightarrow{AC}$**

$m_1 = \dfrac{\text{الارتفاع}}{\text{الإزاحة}}$ قانون الميل

$= \dfrac{-AB}{BC}$ أو $-\dfrac{AB}{BC}$ الارتفاع $= -AB$، الإزاحة $= BC$

**الخطوة 3** أوضح أن $\triangle ABC \sim \triangle CDE$.

بما أن $\triangle ACB$ هو مثلث قائم الزاوية زاويته القائمة هي $B$، فإن الزاوية $\angle BAC$ هي المكملة للزاوية $\angle ACB$. ومن المعطيات $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CE}$، فنعلم أن $\triangle ACE$ هو مثلث قائم الزاوية. وحسب الإنشاء، الزاوية $\angle BCD$ زاوية مستقيمة. إذًا، فالزاوية $\angle ECD$ هي زاوية مكملة للزاوية $\angle ACB$. وبما أن الزوايا المكملة لنفس الزاوية تكون متطابقة، فإن $\angle BAC \cong \angle ECD$. وبما أن الزوايا المستقيمة متطابقة، فإن $\angle D \cong \angle B$. إذًا، حسب تشابه AA، فإن $\triangle ABC \sim \triangle CDE$.




**الخطوة 4** استخدم الحقيقة $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ في إثبات أن $m_1 m_2 = -1$.

بما أن $m_1 = -\dfrac{AB}{BC}$ و $m_2 = \dfrac{DE}{CD}$، فإن $m_1 m_2 = \left(-\dfrac{AB}{BC}\right)\left(\dfrac{DE}{CD}\right)$.

وبما أن المضلعين المتشابهين يشتملان على أضلاع متناسبة،

فإن $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{CD}{DE}$. إذًا بالتعويض يكون $m_1 m_2 = \left(-\dfrac{CD}{DE}\right)\left(\dfrac{DE}{CD}\right)$ أو $-1$.

## استخدام النماذج

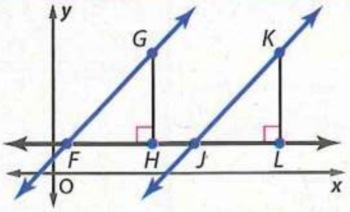
1. **البرهان** استخدم الرسم التخطيطي من النشاط 1 في إثبات النصف الثاني من النظرية.

**المعطيات:** ميل $\overleftrightarrow{CE} = m_1$ وميل $\overleftrightarrow{AC} = m_2$ و $m_1 m_2 = -1$ $\triangle ABC$ هو مثلث قائم الزاوية زاويته القائمة هي $B$. $\triangle CDE$ هو مثلث قائم الزاوية زاويته القائمة هي $D$.

**المطلوب:** $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AC}$

يمكنك أيضًا استخدام مثلثات متشابهة في إثبات بعض العبارات عن المستقيمات المتوازية.

### النشاط 2 مستقيمات متوازية




**المعطيات:** ميل $\overleftrightarrow{FG} = m_1$ وميل $\overleftrightarrow{JK} = m_2$ و $m_2 = m_1$. $\triangle FHG$ هو مثلث قائم الزاوية زاويته القائمة هي $H$. $\triangle JLK$ هو مثلث قائم الزاوية زاويته القائمة هي $L$.

**المطلوب:** $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{JK}$

**الخطوة 1** في المستوى الإحداثي، قم بإنشاء المستقيم $\overleftrightarrow{FG}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{JK}$ والمثلث القائم الزاوية $\triangle FHG$ والمثلث القائم الزاوية $\triangle JLK$. ثم ارسم القاطع الأفقي $\overleftrightarrow{FL}$، كما هو موضح.

**الخطوة 2** جـد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{FG}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{JK}$

**ميل $\overleftrightarrow{JK}$**

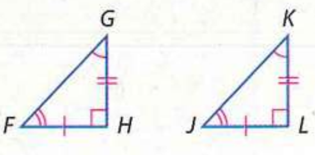
$m_2 = \dfrac{\text{الارتفاع}}{\text{الإزاحة}}$ قانون الميل

$= \dfrac{KL}{LJ}$ الارتفاع $= KL$، الإزاحة $= LJ$

**ميل $\overleftrightarrow{FG}$**

$m_1 = \dfrac{\text{الارتفاع}}{\text{الإزاحة}}$ قانون الميل

$= \dfrac{GH}{HF}$ الارتفاع $= GH$، الإزاحة $= HF$




**الخطوة 3** أثبت أن $\triangle FHG \sim \triangle JLK$.

من المعطيات $m_1 = m_2$. وبالتعويض $\dfrac{GH}{HF} = \dfrac{KL}{LJ}$.

يمكن إعادة كتابة هذه النسبة في الصورة $\dfrac{GH}{KL} = \dfrac{HF}{LJ}$.

بما أن الزاوية $\angle H$ والزاوية $\angle L$ قائمتان، إذًا $\angle H \cong \angle L$.

إذًا حسب تشابه SAS، فإن $\triangle FHG \sim \triangle JLK$.

**الخطوة 4** استخدم الحقيقة $\triangle FHG \sim \triangle JLK$ في إثبات أن $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{JK}$

الزوايا المتناظرة في المثلثات المتشابهة تكون متطابقة، إذًا $\angle KJL \cong \angle GFH$.

من تعريف الزوايا المتطابقة، $m\angle GFH = m\angle KJL$ (أو $\angle GFH \cong \angle KJL$).

وحسب التعريف، تكوّن الزاويتان $\angle KJH$ و $\angle KJL$ زوجًا خطيًا. وبما أن الأزواج الخطية تكون متكاملة، فإن $m\angle KJH + m\angle KJL = 180$. إذًا بالتعويض، يكون $m\angle KJH + m\angle GFH = 180$. حسب التعريف، الزاويتان $\angle KJH$ و $\angle GFH$ متكاملتان. وبما أن الزاويتين $\angle KJH$ و $\angle GFH$ متكاملتان وكذلك هما زوايا داخلية متتالية، فإن $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{JK}$.

## استخدام النماذج

2. **البرهان** استخدم الرسم التخطيطي من النشاط 2 في إثبات العبارة التالية.

**المعطيات:** ميل $\overleftrightarrow{FG} = m_1$ وميل $\overleftrightarrow{JK} = m_2$ و $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{JK}$.

**المطلوب:** $m_1 = m_2$

# 7-4 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

| :: السابق | :: الحالي | :: لماذا؟ |
|---|---|---|
| • لقد استخدمت التناسب في حل المسائل بين المثلثات المتشابهة. | • 1 إستخدام الأجزاء المتناسبة داخل المثلثات. <br> 2 إستخدام الأجزاء المتناسبة مع المستقيمات المتوازية. | • أمام المصورين أساليب عديدة يستخدمونها في إضافة الإثراء والتشويق إلى الصور. من هذه الأساليب استخدام منظور نقطة التلاشي والذي فيه يتم التقاط صورة بها خطوط متوازية، مثل قضبان السكك الحديدية، بحيث تتلاقى هذه الخطوط عند نقطة بالأفق. |

## المفردات الجديدة

منصف المثلث
Midsegment of a triangle

## ممارسات في الرياضيات

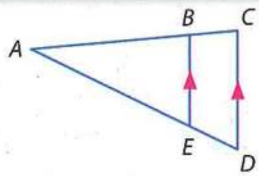
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

## 1 الأجزاء المتناظرة داخل المثلثات

عندما يحتوي مثلث على مستقيم يوازي أحد أضلاعه، فيمكن باستخدام مسلمة تشابه الزوايا إثبات تشابه المثلثين المتكونين. بما أن المثلثين متشابهين، فإن أضلاعهما تكون متناسبة.

### نظرية 7.5 نظرية تناسب المثلثات

إذا توازى مستقيم مع أحد أضلاع المثلث وكان ينصف الضلعين الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة أطوالها متناسبة.



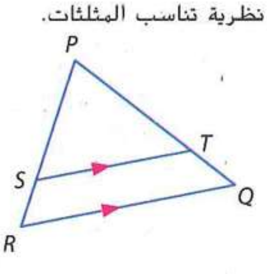

**مثال** إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$.

سوف تثبت النظرية 7.5 في التمرين 30.

### مثال 1 إيجاد طول الضلع

**في $\triangle PQR$، $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}$. إذا كان $PT = 7.5$ و $TQ = 3$ و $SR = 2.5$، فجد $PS$.**

استخدم نظرية تناسب المثلثات.




$\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ}$ نظرية تناسب المثلثات

$\frac{PS}{2.5} = \frac{7.5}{3}$ التعويض

$PS \times 3 = (2.5)(7.5)$ خاصية الضرب التبادلي

$3PS = 18.75$ اضرب

$PS = 6.25$ اقسم كل طرف على 3

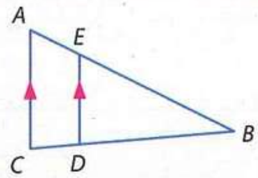
**تمرين موجّه**

**1.** إذا كان $PS = 12.5$ و $SR = 5$ و $PT = 15$، فجد $TQ$.

عكس النظرية 7.5 صحيح أيضًا ويمكن إثباته باستخدام الأجزاء المتناسبة من المثلث.

**الربط بتاريخ الرياضيات**
**جاليليو جاليلي (1564-1642)**
ولد جاليليو في مدينة بيزا بإيطاليا. درس الفلسفة والفضاء والرياضيات. وقدم إسهامات كبيرة في المجالات الثلاثة كلها. راجع التمرين 39.
**المصدر:** موسوعة بيرتانيكا

### النظرية 7.6 معكوس نظرية تناسب المثلثات

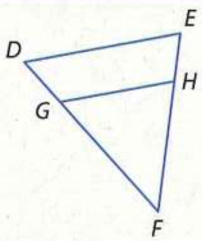



إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسّم الضلعين إلى قطع مستقيمة متناظرة متناسبة، فإن هذا المستقيم يكون موازيًا للضلع الثالث في المثلث.

**مثال** إذا كان $\frac{AE}{EB}=\frac{CD}{DB}$ ، فإن $\overline{AC} \parallel \overline{ED}$.

سوف تثبت النظرية 7.6 في التمرين 31.

### مثال 2 تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيان أم لا




**في $\triangle DEF$ و $EH = 3$ و $HF = 9$ وطول $DG$ يبلغ ثـلـث طول $\overline{GF}$. هل $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$؟**

باستخدام معكوس نظرية تناسب المثلثات، لإثبات أن $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$ ، يجب أن نثبت أن $\frac{DG}{GF}=\frac{EH}{HF}$ .

جـــد كل نسبة وحوّلها لأبسط صورة. فلتفرض أن $DG = x$.
وبما أن $DG$ تساوي ثلث $GF$، إذًا $GF = 3x$.

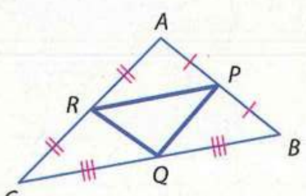
$\frac{EH}{HF}=\frac{3}{9}$ أو $\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{DG}{GF}=\frac{x}{3x}$ أو $\frac{1}{3}$

وبما أن $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$، والأضلاع متناسبة فإن $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$.

**تمرين موجّه**

**2.** $DG$ تبلغ نصف طول $\overline{GF}$، و $EH = 6$ و $HF = 10$. هل $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$؟ لا

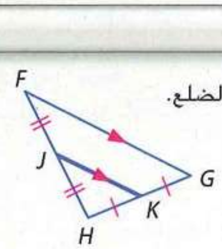
**نصيحة دراسية**
**منصف المثلث**
منصفات المثلث الثلاثة تكوّن *مثلث المنصفات.*




**منصف المثلث** هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها في منتصف ضلعين من أضلاع المثلث. لكل مثلث ثلاثة منصفات. منصفات المثلث $\triangle ABC$ هي $\overline{RP}$ و $\overline{PQ}$ و $\overline{RQ}$.

نظرية تناسب منصفات المثلثات هي حالة خاصة من نظرية تناسب المثلثات.

### نظرية 7.7 نظرية منصفات المثلث



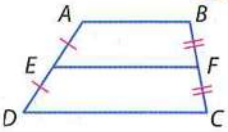

يكون منصف المثلث موازيًا لأحد أضلاع المثلث، ويبلغ طوله نصف طول هذا الضلع.

**مثال** إذا كان $J$ و $K$ هما نقطتا المنتصف للضلعين $\overline{FH}$ و $\overline{HG}$، على الترتيب، فإن $\overline{JK} \parallel \overline{FG}$ وكذلك $JK = \frac{1}{2}FG$.

سوف تثبت النظرية 7.7 في التمرين 32.

**نصيحة دراسية**

**المنصف** نظرية منصفات المثلث تشبه نظرية منصف ساقي شبه المنحرف والتي تنص على أن منصف ساقي شبه المنحرف يوازي القاعدتين ويبلغ طوله نصف مجموع طولي القاعدتين. (الدرس 6-6)

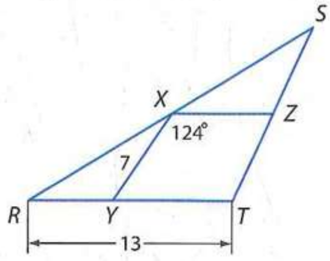


$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

## مثال 3 استخدام نظرية منصفات المثلث

**في الصورة، $\overline{XY}$ و $\overline{XZ}$ منصفان في المثلث $\triangle RST$. جد قياس كل مما يلي.**



**a.** $XZ$

$XZ = \frac{1}{2} RT$ نظرية منصفات المثلث

$XZ = \frac{1}{2}(13)$ بالتعويض

$XZ = 6.5$ بسّط

**b.** $ST$

$XY = \frac{1}{2} ST$ نظرية منصفات المثلث

$7 = \frac{1}{2} ST$ بالتعويض

$14 = ST$ اضرب كل طرف في 2

**c.** $m\angle RYX$

حسب نظرية منصفات المثلث، $\overline{XZ} \parallel \overline{RT}$.

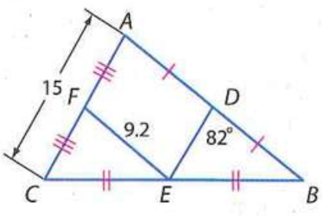
$\angle RYX \cong \angle YXZ$ نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة

$m\angle RYX = m\angle YXZ$ تعريف التطابق

$m\angle RYX = 124$ بالتعويض

**تمرين موجّه**

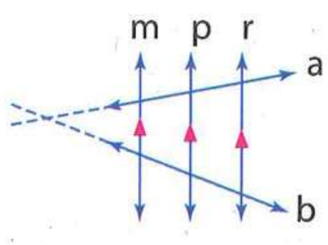
**جـد قياس كل مما يلي.**



**3A.** $DE$

**3B.** $DB$

**3C.** $m\angle FED$



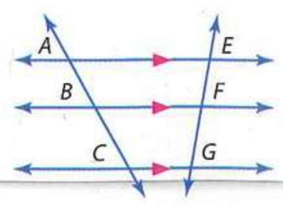
## 2 الأجزاء المتناسبة والمستقيمات المتوازية

حالة خاصة أخرى من نظرية تناسب المثلثات تتضمن ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر يقطعها قاطعان. لاحظ أنه عند مد القاطعين a و b فإنهما يكونان مثلثات مع المستقيمات المتوازية.

### النتيجة 7.1 الأجزاء المتناسبة للمستقيمات المتوازية

عند تقاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع قاطعين فإنها تقسّم القاطعين إلى أجزاء متناسبة.

**مثال** إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$.



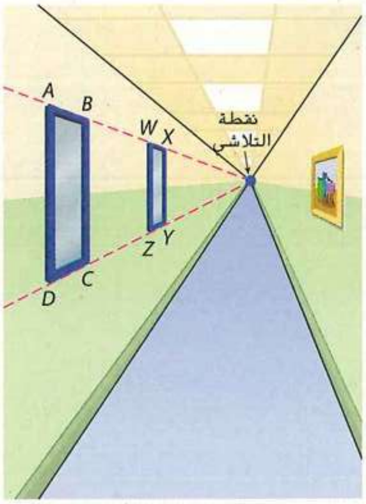
**نصيحة دراسية**

**تناسبات أخرى** يمكن كتابة تناسبين آخرين للمثال في النتيجة 2.1

$\frac{AC}{BC} = \frac{EG}{FG}$ و $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$

ستثبت النتيجة 7.1 في التمرين 28.

## مثال 4 من الحياة اليومية استخدام القطع المستقيمة المتناسبة للقاطعين




**فن** **ترسم شيخة ممرًا بمنظور النقطة الواحدة. تستخدم الإرشادات الموضحة في رسم نافذتين على الحائط الأيسر. إذا كانت القطع المستقيمة $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{WZ}$ و $\overline{XY}$ كلها متوازية وكانت AB = 8 cm وكانت DC = 9 cm وكانت ZY = 5 cm ، فجـد $WX$.**

حسب النتيجة 7.1، إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{WZ} \parallel \overline{XY}$،

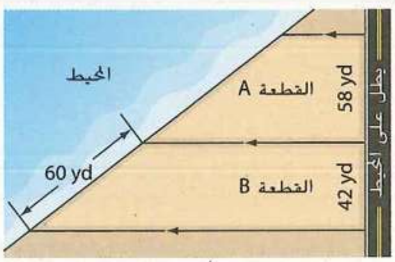
فإن $\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$.

| | |
|---|---|
| النتيجة 7.1 | $\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$ |
| بالتعويض | $\frac{8}{WX} = \frac{9}{5}$ |
| خاصية الضرب التبادلي | $WX \times 9 = 8 \times 5$ |
| بسّط | $9WX = 40$ |
| اقسم كل طرف على 4 | $WX = \frac{40}{9}$ |

من المفترض أن تكون المسافة بين $W$ و $X$ $\frac{40}{9}$ أو حوالي 4.4 cm.

**التحقق** نسبة $DC$ إلى $ZY$ تبلغ 9 إلى 5، أي حوالي 10 إلى 5 أو 2 إلى 1. نسبة $AB$ إلى $WX$ تبلغ 8 إلى 4.4 أو حوالي 8 إلى 4 أو 2 إلى 1 كذلك، إذًا فالإجابة منطقية. ✓

### تمرين موجّه




**4. العقارات** *الواجهة* هي قياس طول حد العقار الذي يطل على ميزة معينة مثل شارع أو بحيرة أو محيط أو نهر. جـد طول واجهة المحيط للقطعة A مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الياردة.

### الربط بالحياة اليومية

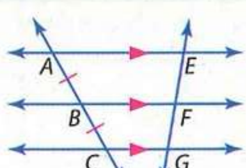
لكي يظهر الرسم ثنائي الأبعاد ثلاثي الأبعاد، يقدم فنان عدة إشارات تصورية.

- *الحجم* – الأشياء البعيدة تبدو أقرب
- *الوضوح* – الأشياء الأقرب تبدو أكثر تركيزًا
- *التفاصيل* – الأشياء القريبة يكون لها هيئة وشكل بينما الأشياء البعيدة تكون تقريبًا مخططة

**المصدر:** *مركز تعليم الوسائط*

إذا كان معامل القياس للقطع المستقيمة المتناسبة هو 1، فإنها تقسم القاطعين إلى أجزاء متطابقة.

### النتيجة 7.2 الأجزاء المتطابقة للمستقيمات المتوازية



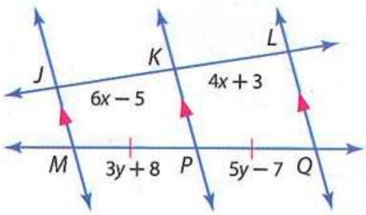

إذا أحدثت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قطعًا مستقيمة متطابقة على قاطع ما، فإنها تحدث قطعًا مستقيمة متطابقة على كل القواطع.

**مثال** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ وكان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$،

فإن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$.

ستثبت النتيجة 7.2 في التمرين 29.

## مثال 5 من الحياة اليومية استخدام القطع المستقيمة المتطابقة للقاطعين



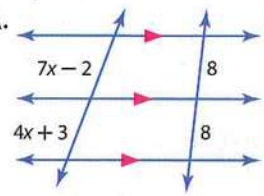

**الجبر** جـد قيمة $x$ و $y$.

بما أن $\overleftrightarrow{JM} \parallel \overleftrightarrow{KP} \parallel \overleftrightarrow{LQ}$ و $\overline{MP} \cong \overline{PQ}$،
فإن $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ حسب النتيجة 2.2.

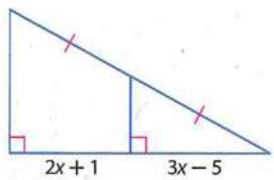
| | |
|---|---|
| $JK = KL$ | تعريف التطابق |
| $6x - 5 = 4x + 3$ | بالتعويض |
| $2x - 5 = 3$ | اطرح $4x$ من كل طرف |
| $2x = 8$ | اجمع 5 إلى كل طرف |
| $x = 4$ | اقسم كل طرف على 2 |
| $MP = PQ$ | تعريف التطابق |
| $3y + 8 = 5y - 7$ | بالتعويض |
| $8 = 2y - 7$ | اطرح $3y$ من كل طرف |
| $15 = 2y$ | اجمع 7 إلى كل طرف |
| $7.5 = y$ | اقسم كل طرف على 2 |

تمرين موجّه

**5A.**




**5B.**

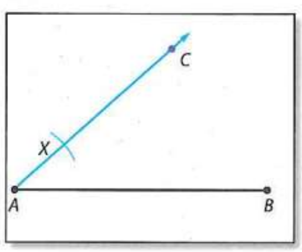



من الممكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى جزءين متطابقين عن طريق إنشاء منصف عمودي على القطعة المستقيمة. إلا أنه لا يمكن تقسيم القطعة المستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة بإنشاء منصفات عمودية. لفعل ذلك، يجب عليك استخدام المستقيمات المتوازية والنتيجة 7.2.

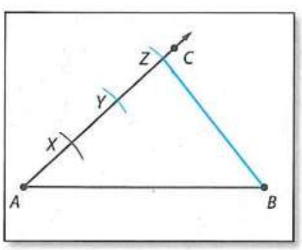
## الإنشاء تقسيم القطعة المستقيمة إلى ثلاثة أجزاء

ارسم قطعة مستقيمة $\overline{AB}$. ثم استخدم النتيجة 2.2 لتقسيم $\overline{AB}$ إلى ثلاثة أجزاء.

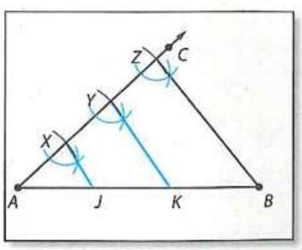

**الخطوة 1** ارسم $\overline{AC}$. ثم مع وضع الفرجار عند $A$، ارسم قوسًا يقطع $\overline{AC}$ عند $X$.




**الخطوة 2** استخدم نفس وضعية الفرجار في رسم $Y$ و $Z$ بحيث $\overline{AX} \cong \overline{XY} \cong \overline{YZ}$. ثم ارسم $ZB$.



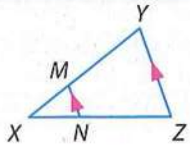

**الخطوة 3** ارسم مستقيمين يمران بالنقطة $Y$ والنقطة $X$ ويوازيان $\overline{ZB}$ قم بتسمية نقاط التقاطع على $\overline{AB}$ باسم $J$ و $K$.




**الاستنتاج:** بما أن المستقيمين المتوازيين يحدثان قِطعًا مستقيمة متطابقة على القاطعين، فإن $\overline{AJ} \cong \overline{JK} \cong \overline{KB}$.

## التحقق من فهمك

**مثال 1**

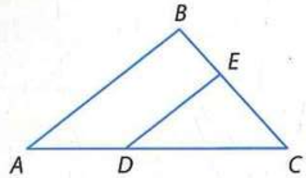



**1.** إذا كان $XM = 4$ و $XN = 6$ و $NZ = 9$، فجـد $XY$.

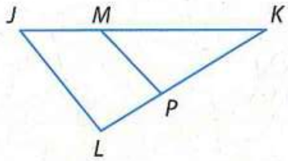
**2.** إذا كان $XN = 6$ و $XM = 2$ و $XY = 10$، فجـد $NZ$.

**مثال 2**

**3.** في $\triangle ABC$، $BC = 15$ و $BE = 6$ و $DC = 12$ و $AD = 8$.
حدد ما إذا كان $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ أم لا.
علل إجابتك.

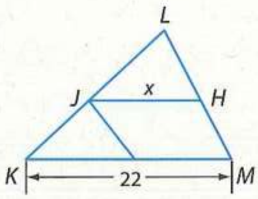



**4.** في $\triangle JKL$، $JK = 15$ و $JM = 5$ و $LK = 13$ و $PK = 9$.
حدد ما إذا كان $\overline{JL} \parallel \overline{MP}$ أم لا.
علل إجابتك.

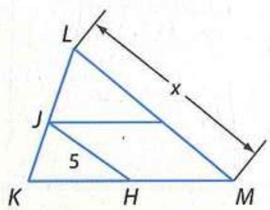



**مثال 3** **$\overline{JH}$ هي منصف المثلث $\triangle KLM$. جـد قيمة $x$.**

**5.**




**6.**

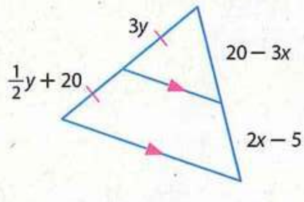



**مثال 4**

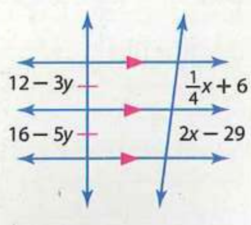
**7.** **خرائط** راجع الخريطة الموجودة على اليسار. الشارع الثالث والطريق الشارع الخامس متوازيان. إذا كانت المسافة من الشارع الثالث إلى سيتي مول مرورًا بشارع ستيت ستريت هي 3201 ft، فجـد المسافة بين الشارع الخامس وسيتي مول و مرورًا بشارع يونيون ستريت. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.


**مثال 5** **الجبر** **جـد قيمة $x$ و $y$.**

**8.**

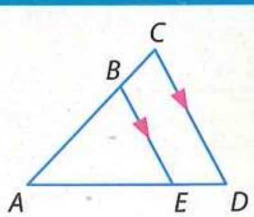



**9.**




## التمرين وحل المسائل

**مثال 1**




**10.** إذا كان $AB = 6$ و $BC = 4$ و $AE = 9$، فجـد $ED$.

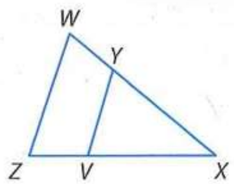
**11.** إذا كان $AB = 12$ و $AC = 16$ و $ED = 5$، فجـد $AE$.

**12.** إذا كان $AC = 14$ و $BC = 8$ و $AD = 21$، فجـد $ED$.

**13.** إذا كان $AD = 27$ و $AB = 8$ و $AE = 12$، فجـد $BC$.

مثال 2

**حدد ما إذا كان $\overline{VY} \parallel \overline{ZW}$ أم لا. علل إجابتك.**




14. $ZX = 18$ و $ZV = 6$ و $WX = 24$ و $YX = 16$

15. $VX = 7.5$ و $ZX = 24$ و $WY = 27.5$ و $WX = 40$

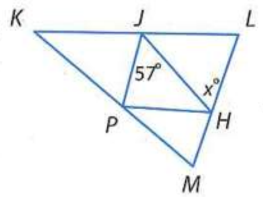
16. $ZV = 8$ و $VX = 2$ و $YX = \frac{1}{2}WY$

17. $WX = 31$ و $YX = 21$ و $ZX = 4ZV$

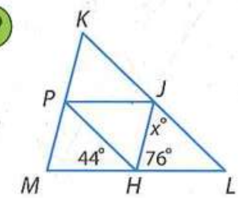
مثال 3

**$\overline{JH}$ و $\overline{JP}$ و $\overline{PH}$ هي منصفات المثلث $\triangle KLM$. جـد قيمة $x$.**

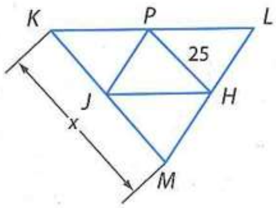
18.



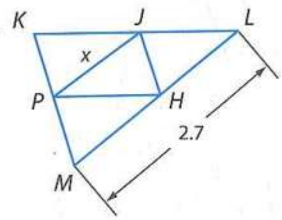

19.




20.

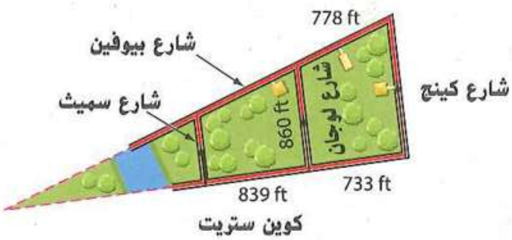



21.

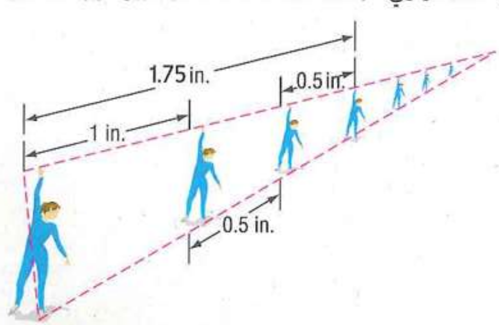



مثال 4

22. **استخدام النماذج** في تشارلستون بولاية كارولينا الجنوبية، يتوازى شارع لوجان ستريت مع كل من شارع كينج ستريت وشارع سميث ستريت بين شارع بايوفين ستريت وشارع كوين ستريت. ما المسافة من سميث إلى لوجان مرورًا بشارع بيوفين؟ قرّب إلى أقرب قدم.



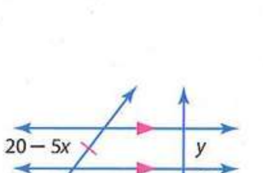

23. **فن** رسمت حورية مجموعة من الأشكال الموضحة أدناه في خط مستقيم في مشروعها المنظوري في مادة التربية الفنية. جميع الأشكال في حالة توازي. جـد المسافة السفلية بين أول شكلين.



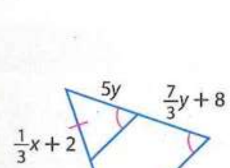

مثال 5

**الجبر** جـد قيمة $x$ و $y$.

24.

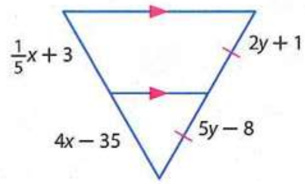



25.

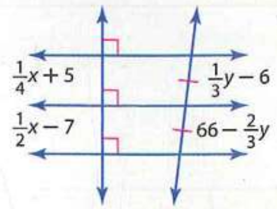


**الجبر** جـد قيمة $x$ و $y$.

**26.**




**27.**



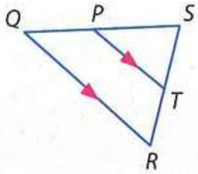

**الفرضيات** **اكتب فقرة برهان.**

**28.** النتيجة 2.1 **29.** النتيجة 2.2 **30.** النظرية 2.5

**الفرضيات** **اكتب برهانًا من عمودين.**

**31.** النظرية 2.6 **32.** النظرية 2.7

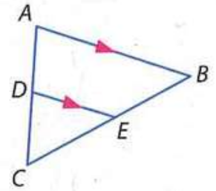
**ارجع إلى $\triangle QRS$.**



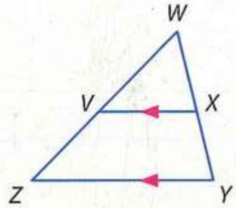

**33.** إذا كان $ST = 8$ و $TR = 4$ و $PT = 6$، فجـد $QR$.

**34.** إذا كان $SP = 4$ و $PT = 6$ و $QR = 12$، فجـد $SQ$.

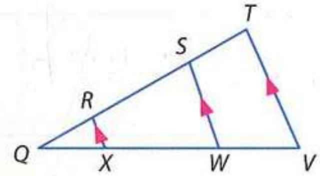
**35.** إذا كان $CE = t - 2$ و $EB = t + 1$ و $CD = 2$ و $CA = 10$، فجـد $t$ و $CE$.



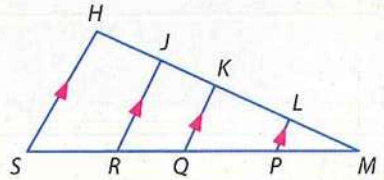

**36.** إذا كان $WX = 7$ و $WY = a$ و $WV = 6$ و $VZ = a - 9$، فجـد $WY$.



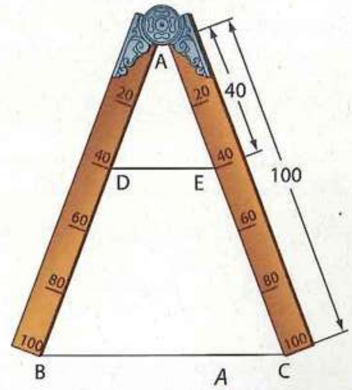

**37.** إذا كان $QR = 2$ و $XW = 12$ و $QW = 15$ و $ST = 5$، فجـد $RS$ و $WV$.



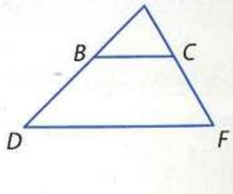

**38.** إذا كان $LK = 4$ و $MP = 3$ و $PQ = 6$ و $KJ = 2$ و $RS = 6$ و $LP = 2$، فجـد $ML$ و $QR$ و $QK$ و $JH$.




**39. تاريخ الرياضيات** فرجار التقسيم التناسبي هو أداة اخترعها جاليليو في القرن السادس عشر لتستخدم في القياس. لرسم قطعة مستقيمة يكون طولها خُمسي طول قطعة مستقيمة معينة، قم بمحاذاة طرفي الذارعين مع القطعة المستقيمة المعينة. ثم ارسم قطعة مستقيمة عند العلامة 40. اكتب تفسيرًا يوضح سبب استخدام فرجار التقسيم التناسبي في إنشاء القياس التناسبي.



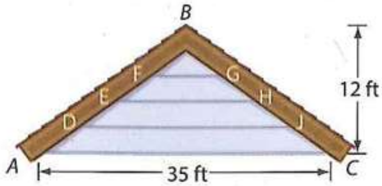

**حدد قيمة $x$ بحيث $\overline{BC} \parallel \overline{DF}$.**




**40.** $AB = x + 5$ و $BD = 12$ و $AC = 3x + 1$ و $CF = 15$

**41.** $AC = 15$ و $BD = 3x - 2$ و $CF = 3x + 2$ و $AB = 12$

**42.** **الهندسة الإحداثية** $\triangle ABC$ رؤوسه $A(-8, 7)$ و $B(0, 1)$ و $C(7, 5)$. ارسم $\triangle ABC$. حدد إحداثيات منصف المثلث $\triangle ABC$ الذي يوازي $\overline{BC}$. علل إجابتك.




**43.** **المنازل** راجع الرسم التخطيطي للجملون الموجود على اليسار. القطع الجانبية متساوية. جد أطوال $\overline{FG}$ و $\overline{EH}$ و $\overline{DJ}$.

**الإنشاءات** **قم بإنشاء كل قطعة مستقيمة حسب المطلوب.**

**44.** قطعة مستقيمة مقسمة إلى خمس قطع متطابقة

**45.** قطعة مستقيمة مقسمة إلى قطعتين النسبة بين طوليهما تبلغ 1 إلى 3

**46.** قطعة مستقيمة طولها 3 in مقسمة إلى أربع قطع متطابقة

**47.** **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تكتشف منصفات الزوايا والتناسبات.

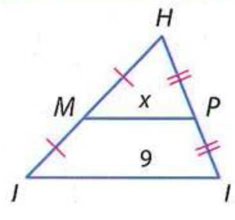
**a.** **هندسيًا** ارسم ثلاثة مثلثات، أحدها حاد الزاوية والثاني منفرج الزاوية والثالث قائم الزاوية. قم بتسمية أحدها $ABC$ وارسم منصف الزاوية $\overrightarrow{BD}$. قم بتسمية الثاني باسم $MNP$ وارسم منصف الزاوية $\overrightarrow{NQ}$ وبتسمية الثالث باسم $WXY$ مع رسم الزاوية $\overrightarrow{XZ}$.

**b.** **جدوليًا** انسخ الجدول الذي على اليسار وأكمله بالقيم المناسبة.

**c.** **لفظيًا** قم بعمل تخمين حول القطع المستقيمة التي أنشأها منصف الزاوية بالمثلث.

| المثلث | الطول | | النسبة | |
|---|---|---|---|---|
| ABC | AD | | $\frac{AD}{CD}$ | |
| | CD | | | |
| | AB | | $\frac{AB}{CB}$ | |
| | CB | | | |
| MNP | MQ | | $\frac{MQ}{PQ}$ | |
| | PQ | | | |
| | MN | | $\frac{MN}{PN}$ | |
| | PN | | | |
| WXY | WZ | | $\frac{WZ}{YZ}$ | |
| | YZ | | | |
| | WX | | $\frac{WX}{YX}$ | |
| | YX | | | |

## مسائل مهارات التفكير العليا



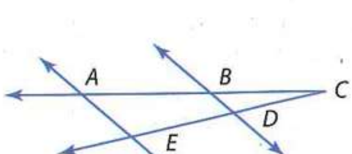

**48.** **التفكير النقدي** يحاول حمد وخالد إيجاد قيمة $x$ في $\triangle JHL$. يقول حمد إن $MP$ أحد نصفي $JL$. إذًا فقيمة $x$ تبلغ 4.5. ويرى خالد أن $JL$ أحد نصفي $MP$ وإذًا فقيمة $x$ هي 18. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح.

**49.** **التبرير** في $\triangle ABC, AF = FB$ و $AH = HC$.
إذا كان $D$ تبلغ $\frac{3}{4}$ المسافة من $A$ إلى $B$ وكان $E$ تبلغ $\frac{3}{4}$ المسافة من $A$ إلى $C$. فهل $DE$ تساوي دائمًا أم *أحيانًا أم لا تساوي مطلقًا* $\frac{3}{4}$ قيمة $BC$؟ اشرح.

**50.** **تحدٍ** اكتب برهانًا من عمودين.

**المعطيات:** $AB = 4$ و $BC = 4$ و $CD = DE$

**المطلوب:** $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

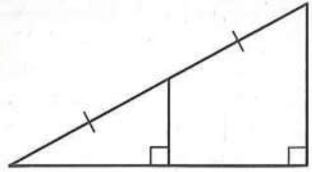



**51.** **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم ثلاث قطع مستقيمة، $a$ و $b$ و $c$، بحيث تكون مختلفة الأطوال. ارسم قطعة رابعة، $d$، بحيث $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

**52.** **الكتابة في الرياضيات** قارن بين نظرية تناسب المثلثات ونظرية منصفات المثلث.

## تدريب على الاختبار المعياري

**53. إجابة قصيرة** ما قيمة $x$؟



**54.** إذا كانت رؤوس المثلث $JKL$ هي $(0, 0)$ و $(0, 10)$ و $(10, 10)$، فإن مساحة المثلث $JKL$ هي

**A** 20 وحدة مربعة　　**C** 40 وحدة مربعة

**B** 30 وحدة مربعة　　**D** 50 وحدة مربعة

**55. الجبر** تبلغ نسبة حبوب الأرز والقمح والشوفان المكون منها وجبة إفطار 1:4:2. إذا كانت الجهة المصنعة تصنع مخلوطًا به 110 kg من القمح فكم كيلو جرام من الأرز المستخدمة؟

**F** 120 kg　　**H** 240 kg

**G** 220 kg　　**J** 440 kg

**56. SAT/ACT** إذا كانت مساحة الدائرة تبلغ $16\ m^2$، فما طول نصف القطر بالمتر؟

**A** $\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi}$　　**D** $12\pi$

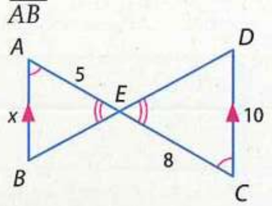
**B** $\frac{8}{\pi}$　　**E** $16\pi$

**C** $\frac{16}{\pi}$

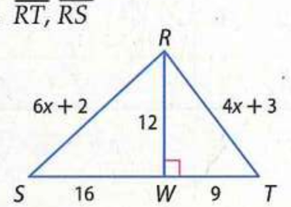
## مراجعة شاملة

**الجبر** حدد المثلثات المتشابهة. ثم جد أطوال القطع المستقيمة المشار إليها. (الدرس 3-2)

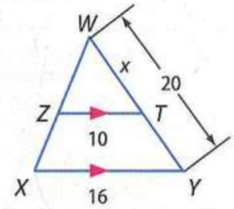
**57.** $\overline{AB}$



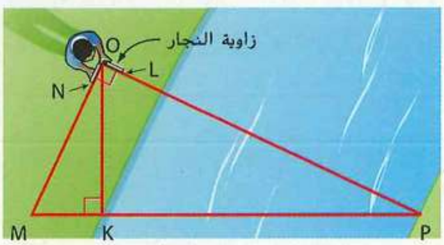

**58.** $\overline{RT}, \overline{RS}$




**59.** $\overline{TY}$




**60. المسح** يستخدم بلال زاوية النجار في إيجاد المسافة عبر جدول. تستخدم زاوية النجار نموذج الزاوية القائمة $NOL$. يضع السيد خليفة الزاوية أعلى سارية مرتفعة بما يكفي للنظر باتجاه $\overline{OL}$ حتى النقطة $P$ التي على الضفة الأخرى من النهر. ثم ينظر باتجاه $\overline{ON}$ حتى النقطة $M$. إذا كان طول $MK$ هو 1.5 m وطول $OK$ هو 4.5 m، فجد المسافة $KP$ التي تعبر الجدول. (الدرس 2-2)

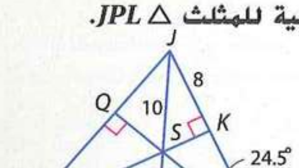



**هندسة إحداثية** بالنسبة لكل شكل رباعي له رؤوس معلومة، تحقق ما إذا كان الشكل الرباعي هذا شبه منحرف، وحدد ما إذا كان الشكل شبه منحرف متساوي الساقين أم لا.

**61.** $Q(-12, 1), R(-9, 4), S(-4, 3), T(-11, -4)$

**62.** $A(-3, 3), B(-4, -1), C(5, -1), D(2, 3)$

النقطة $S$ هي مركز الدائرة الداخلية للمثلث $\triangle JPL$. جد قياس كل مما يلي.




**63.** $SQ$

**64.** $QJ$

**65.** $m\angle MPQ$

**66.** $m\angle SJP$

## مراجعة المهارات

حُلّ كلاً من التناسبات التالية.

**67.** $\frac{1}{3} = \frac{x}{2}$

**68.** $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$

**69.** $\frac{2.3}{4} = \frac{x}{3.7}$

**70.** $\frac{x-2}{2} = \frac{4}{5}$

**71.** $\frac{x}{12-x} = \frac{8}{3}$

**حِل كلاً من التناسبات التالية.** (الدرس 7-1)

1. $\frac{2}{5} = \frac{x}{25}$

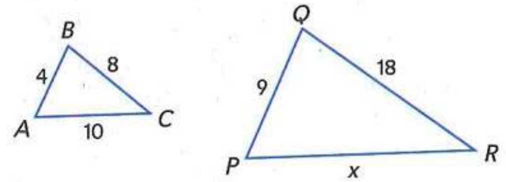
2. $\frac{10}{3} = \frac{7}{x}$

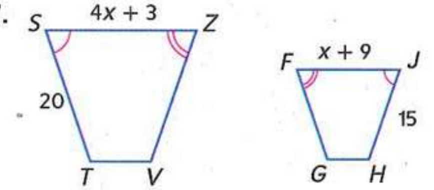
3. $\frac{y+4}{11} = \frac{y-2}{9}$

4. $\frac{z-1}{3} = \frac{8}{z+1}$

5. **البيسبول** متوسط النقاط المحققة لضارب بيسبول هو ناتج ضرب 9 في النسبة بين النقاط المحققة التي سمح بها الضارب وبين عدد الأشواط التي لعبت. خلال موسم 2007، سمح يوهان سانتانا لاعب فريق مينيسوتا توينز بعدد 81 نقطة محققة خلال 219 شوطًا. جـد متوسط النقاط المحققة الخاص به مقربًا إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 7-1)

**يتشابه كل زوجين من المضلعات التالية. جـد قيمة $x$.** (الدرس 7-2)

6. 


7. 


8. **اختيار من متعدد** يبلغ معامل المقياس لمضلعين متشابهين 3:5. محيط المضلع الأكبر 120 m. جـد محيط المضلع الأصغر. (الدرس 7-2)

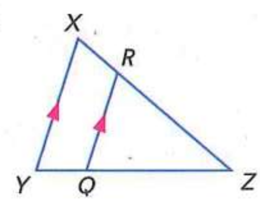
**A** 68 m

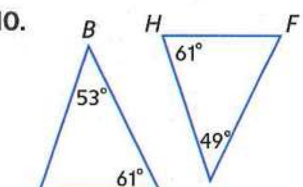
**B** 72 m

**C** 192 m

**D** 200 m

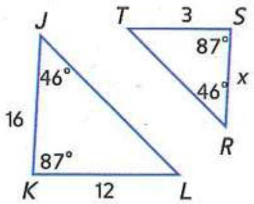
**بيّن تشابه المثلثين من عدمه. إن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. وإن لم يكونا متشابهين، فما الشروط التي تكفي لإثبات تشابه المثلثين؟ اشرح استنتاجك.** (الدرس 7-3)

9. 

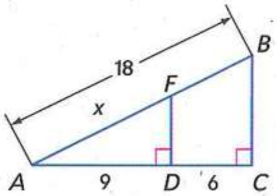

10. 


**الجبر** حدد المثلثات المتشابهة. جـد قياس كل مما يلي. (الدرس 7-3)

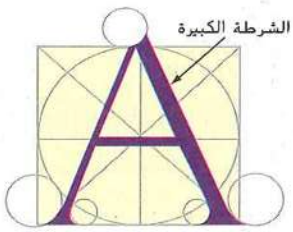
11. $SR$




12. $AF$



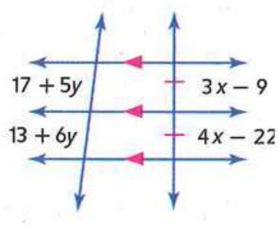

13. **التاريخ** في القرن الخامس عشر، حاول الرياضيون والفنانون إنشاء الحرف المثالي. تم استخدام مربع ليكون إطارًا يوضع فيه الحرف "A" كما هو موضح أدناه. كان سمك الشرطة الكبيرة من الحرف تمثل $\frac{1}{12}$ من ارتفاع الحرف. (الدرس 7-4)

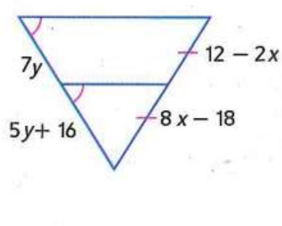



a. بين لمَ الشريط المار بمنتصف الحرف A يمثل نصف المسافة بين الزاويتين الخارجيتين السفليتين لضلعي الحرف.

b. إذا كان ارتفاع الحرف 3 cm، فكم يبلغ سمك الشرطة الكبيرة؟

**الجبر** جـد قيمة $x$ و $y$. (الدرس 7-4)

14. 


15. 

# الدرس 7-5 أجزاء المثلثات المتشابهة

**:: السابق**

- لقد تعلمت أن الأضلاع المتناظرة للمضلعات المتشابهة تكون متناسبة.

**:: الحالي**

1. التعرف على علاقات التناسب بين منصفات الزوايا المتناظرة وارتفاعات ومتوسطات المثلثات المتشابهة واستخدمها.
2. إستخدام نظرية منصفات المثلث.

**:: لماذا؟**

- تستخدم "قاعدة الإبهام" متوسط النسبة بين طول ذراع شخص ما والمسافة بين عينيه وارتفاعات المثلثات المتشابهة لتقدير المسافة بين الشخص وجسم له عرض معلوم تقريبًا.

**ممارسات في الرياضيات**
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

## 1 قطع مستقيمة خاصة للمثلثات المتشابهة

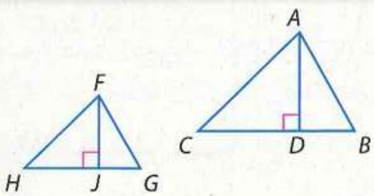
لقد تعلمت بالدرس 2-7 أن أطوال الأضلاع المتناظرة للمضلعات المتشابهة، كالمثلثات، تكون متناسبة. يمكن توسعة هذا المفهوم ليشمل القطع المستقيمة الأخرى بالمثلثات.

### نظريات قطع مستقيمة خاصة بالمثلثات المتشابهة

**7.8** إذا كان هناك مثلثان متشابهان، فإن أطوال الارتفاعات المتناظرة تكون متناسبة مع أطوال الأضلاع المتناظرة.

**الاختصار** $\triangle$ s ~ به ارتفاعات متناظرة متناسبة مع أضلاع متناظرة.

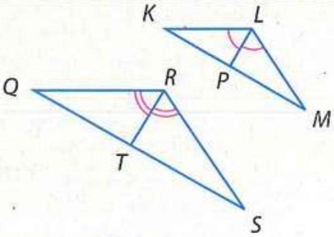
**مثال** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FGH$، فإذًا $\frac{AB}{FG} = \frac{AD}{FJ}$.




**7.9** إذا كان هناك مثلثان متشابهان، فإن أطوال منصفات الزوايا المتناظرة تكون متناسبة مع أطوال الأضلاع المتناظرة.

**الاختصار** $\triangle$ s ~ به منصفات $\angle$ متناظرة متناسبة مع الأضلاع المتناظرة.

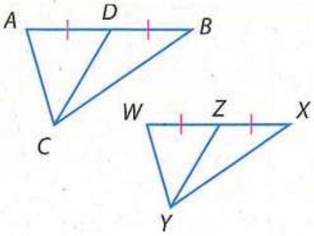
**مثال** إذا كان $\triangle KLM \sim \triangle QRS$، فإذًا $\frac{LM}{RS} = \frac{LP}{RT}$.




**7.10** إذا كان هناك مثلثان متشابهان، فإن أطوال المتوسطات المتناظرة تكون متناسبة مع أطوال الأضلاع المتناظرة.

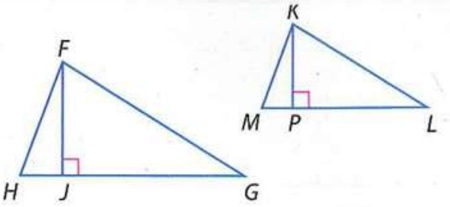
**الاختصار** $\triangle$ s ~ به متوسطات متناظرة متناسبة مع أضلاع متناظرة.

**مثال** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle WXY$، فإن $\frac{AB}{WX} = \frac{CD}{YZ}$.




سوف تقوم بإثبات نظرية 7.9 ونظرية 7.10 خلال التمرينين 18 و 19، على الترتيب.

## برهان النظرية 7.8



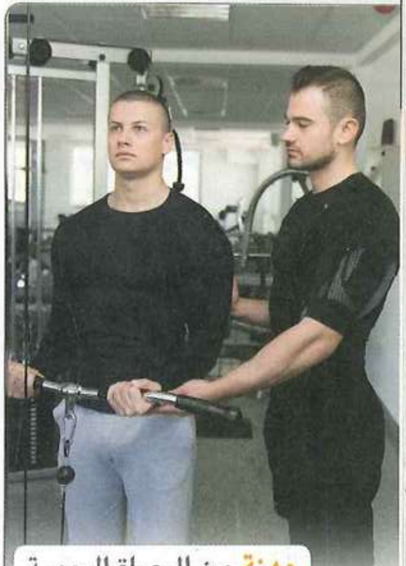

**المعطيات:** $\triangle FGH \sim \triangle KLM$
$\overline{FJ}$ و $\overline{KP}$ ارتفاعان.

**المطلوب:** $\dfrac{FJ}{KP} = \dfrac{HF}{MK}$

**فقرة البرهان:**
بما أن $\triangle FGH \sim \triangle KLM$، فإن $\angle H \cong \angle M$. $\angle FJH \cong \angle KPM$ لأن كلتيهما زاويتان قائمتان مصنوعتان من الارتفاعات المرسومة على الجانب المقابل وجميع الزوايا القائمة متطابقة.

وبالتالي $\triangle HFJ \sim \triangle MKP$ حسب تشابه AA. إذًا $\dfrac{FJ}{KP} = \dfrac{HF}{MK}$ حسب تعريف المضلعات المتشابهة.

بما أن الارتفاعات المتناظرة تم اختيارها عشوائيًا، فنحتاج إلى إثبات النظرية 7.8 لكل زوجين من الارتفاعات.



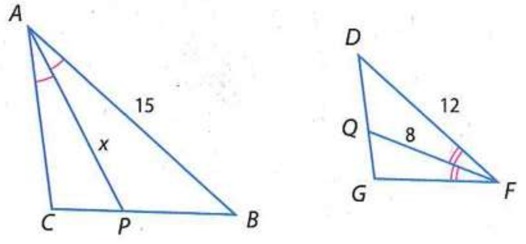
**مهنة من الحياة اليومية**

**مدرب رياضي** يساعد المدرب الرياضي على منع الإصابات الرياضية ومعالجتها. فهو يتأكد من استخدام الأجهزة الواقية المناسبة ومن استيعاب المتدربين لممارسات السلامة التي تمنع الإصابات. يجب حصول المدرب الرياضي على درجة بكالوريوس ليكون معتمدًا. معظمهم أيضًا حاصلون على درجة الماجستير. راجع التمرين 29.

يمكنك استخدام قطع مستقيمة خاصة في مثلثات متشابهة لإيجاد القياسات المجهولة.

### مثال 1 استخدام قطع مستقيمة خاصة في مثلثات متشابهة

**في الشكل، $\triangle ABC \sim \triangle FDG$. جـد قيمة $x$.**




$AP$ و $FQ$ منصفات زوايا متناظرة و $\overline{AB}$ و $\overline{FD}$ أضلاع متناظرة للمثلثين المتشابهين $ABC$ و $FDG$.

| | |
|---|---|
| $\dfrac{AP}{FQ} = \dfrac{AB}{FD}$ | s △~بهما منصفات ∠ متناظرة ومتناسبة مع أضلاع متناظرة. |
| $\dfrac{x}{8} = \dfrac{15}{12}$ | التعويض |
| $8 \cdot 15 = x \cdot 12$ | خاصية الضرب التبادلي |
| $120 = 12x$ | بسّط. |
| $10 = x$ | اقسم كل طرف على 12. |

**نصيحة دراسية**

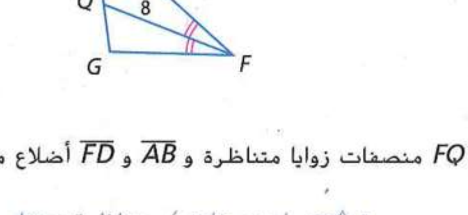
**استخدم معامل المقياس** المثال 1 يمكن أيضًا حله عن طريق إيجاد معامل المقياس أولاً بين $\triangle ABC$ و $\triangle FDG$. نسبة منصف الزاوية في $\triangle ABC$ إلى منصف الزاوية في $\triangle FDG$ تكون إذًا مساوية لمعامل المقياس هذا.

**تمرين موجّه**

**جـد قيمة $x$.**

**1A.**


**1B.**

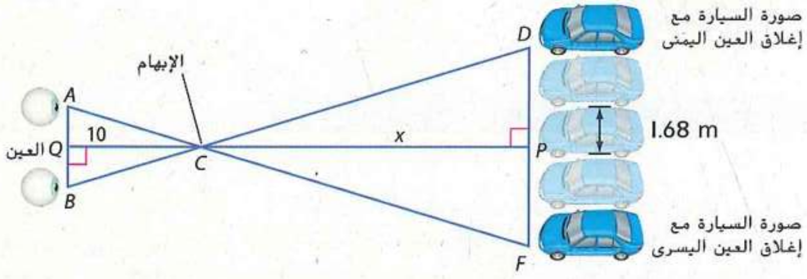


يمكنك استخدام قطع مستقيمة خاصة في مثلثات متشابهة في حل مسائل من الحياة اليومية.

## مثال 2 من الحياة اليومية استخدام المثلثات المتشابهة في حل المسائل

**تقدير المسافات تمد ميسون ذراعها أمامها مع استقامة مرفقها والإشارة بإبهامها نحو الأعلى. ومع إغماض عين واحدة، قامت بمحاذاة طرف إبهامها مع سيارة تقع في مرمى بصرها. ثم أبدلت عينها بدون تحريك رأسها أو ذراعها. فتظهر السيارة وكأنها تحركت بعرض 4 سيارات. إذا كان ذراع ميسون يبلغ حوالي 10 مرات أطول من المسافة بين عينيها، ويبلغ عرض السيارة حوالي 1.68 m، فقدّر المسافة بين إبهام ميسون والسيارة.**

**الفهم** اصنع رسمًا تخطيطيًا للموقف مسميًا المسافات المعطاة وتسمية المسافة المراد إيجادها بالرمز x. أيضًا، قم بتسمية رؤوس المثلث المتكون.




**ملاحظة:** ليست مرسومة وفقًا لمقياس رسم.

نفترض أنه في حالة امتداد إبهام ميسون بشكل مستقيم أمامها. إذًا $\overline{PC}$ هو ارتفاع المثلث $\triangle ABC$. وبالمثل، $\overline{QC}$ هو الارتفاع المتناظر. نفترض أن $\overline{AB} \parallel \overline{DF}$.

**التخطيط** بما أن $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$، فإن $\angle DFC \cong \angle BAC$ و $\angle CDF \cong \angle CBA$ حسب نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة. ولذلك $\triangle ABC \sim \triangle FDC$ حسب تشابه AA. اكتب عبارة تناسب وجـد قيمة x.

**الحل**

$$\frac{PC}{QC} = \frac{AB}{DF}$$ النظرية 7.8

$$\frac{10}{x} = \frac{1}{1.68 \cdot 4}$$ التعويض

$$\frac{10}{x} = \frac{1}{6.72}$$ بسّط.

$$10 \cdot 6.72 = x \cdot 1$$ خاصية الضرب التبادلي

$$6.72 = x$$ بسّط.

إذًا فالمسافة المقدرة للسيارة هي 67.2 m.

**التحقق** نسبة طول ذراع ميسون إلى العرض بين عينيها هي 10 إلى 1. نسبة المسافة من السيارة إلى لمسافة التي تحركت لها صورة السيارة هي 67.2 إلى 6.72 أو 10 إلى 1. ✓

### الربط بالحياة اليومية

اجعل يدك ممتدة أفقيًا بطول ذراعك مع جعل راحة اليد باتجاهك؛ بالنسبة لعرض كلتا اليدين والشمس فوق الأفق، يتبقى ساعة واحدة على المغيب.

**المصدر:** قناة «سيل آيلاند تشانلز»

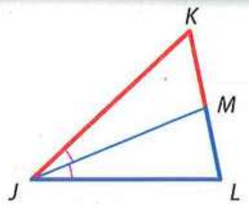
### تمرين موجّه

**2.** لنفترض أن ميسون تقف في آخر الصف وتنظر لساعة على الحائط في مقدمة الصف. إذا كان عرض الساعة 30 cm وبدت وكأنها تحركت عرض 3 ساعات عندما أبدلت عينيها، قدر المسافة من إبهام ميسون إلى الساعة.

## 2 نظرية منصف زاوية المثلث يعمل منصف زاوية المثلث أيضًا على تقسيم الضلع المقابل للزاوية تقسيمًا متناسبًا.

### النظرية 7.11 منصف زاوية المثلث

يعمل منصف الزاوية في المثلث على تقسيم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين متناسبتين مع أطوال الضلعين الآخرين.




**مثال** إذا كان $\overline{JM}$ منصف زاوية في المثلث $\triangle JKL$،

إذًا $\frac{KM}{LM} = \frac{KJ}{LJ}$.

قطعتان مستقيمتان رأسهما $K$ ← $KJ$، $KM$

قطعتان مستقيمتان رأسهما $L$ ← $LJ$، $LM$

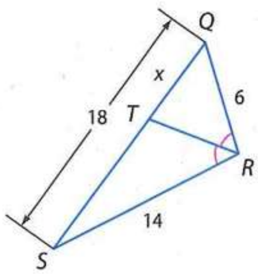
**نصيحة دراسية**

**تناسبات** يمكن كتابة عبارة تناسب أخرى باستخدام نظرية منصف زوايا المثلث وهي $\frac{KM}{KJ} = \frac{LM}{LJ}$.

سوف تثبت النظرية 7.11 في التمرين 25.

### مثال 3 استخدام نظرية منصف زوايا المثلث

جـد $x$.



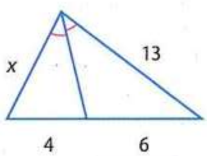

بما أن $\overline{RT}$ منصف زاوية في المثلث $\triangle QRS$، فيمكنك استخدام نظرية منصف زوايا المثلث في كتابة عبارة تناسب.

| | |
|---|---|
| $\frac{QT}{ST} = \frac{QR}{SR}$ | نظرية منصف زوايا المثلث |
| $\frac{x}{18-x} = \frac{6}{14}$ | بالتعويض |
| $(18-x)(6) = x \cdot 14$ | خاصية الضرب التبادلي |
| $108 - 6x = 14x$ | بسّط. |
| $108 = 20x$ | اجمع $6x$ إلى كل طرف. |
| $5.4 = x$ | اقسِم كل طرف على 20. |

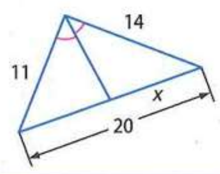
**تمرين موجّه**

جـد قيمة $x$.

**3A.**



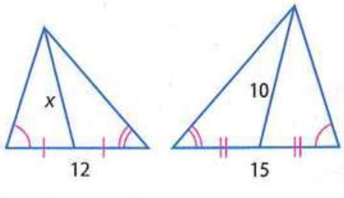

**3B.**



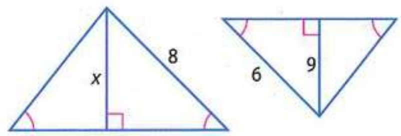

## التحقق من فهمك

**مثال 1** جـد $x$.

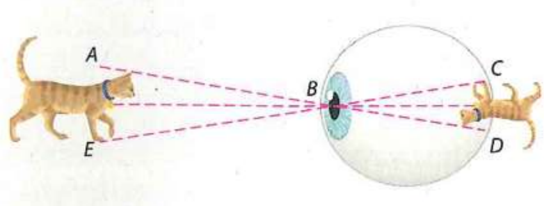
**1**



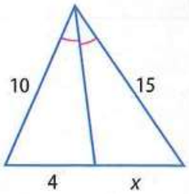

**2.**

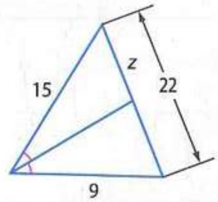



**مثال 2** **3. الرؤية** قطة طولها 25.4 cm تكوّن صورة شبكية تبلغ 7 mm طولاً. إذا كان $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ وكانت المسافة من البؤبؤ إلى الصورة الشبكية تبلغ 25 mm، فكم يبعد البؤبؤ عن القطة؟



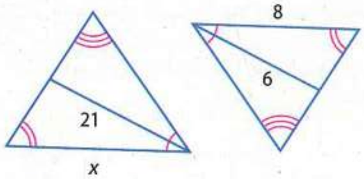
**مثال 3** جـد قيمة كل متغير.

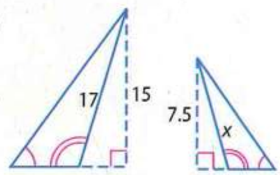
4.


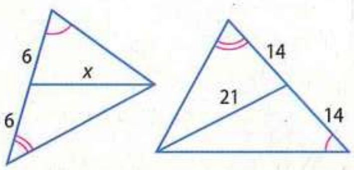

5.


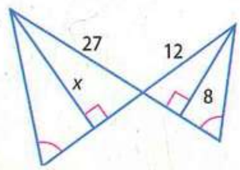

## التمرين وحل المسائل

**مثال 1** جـد $x$.

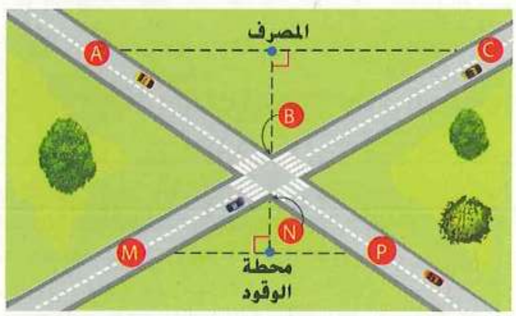
6.



7.


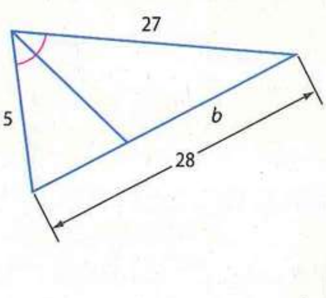

8.


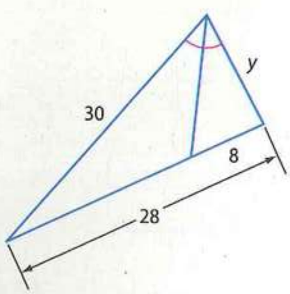

9.


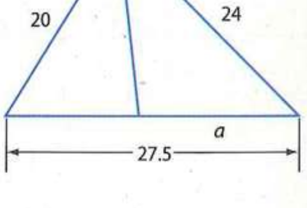

**مثال 2** .10 **الطرق** ينتج عن تقاطع الطريقين الموضحين مثلثان متشابهان. إذا كان $AC$ يبلغ 382 ft و $MP$ يبلغ 248 ft وتقع محطة الوقود على بعد 50 ft من التقاطع، فكم يبعد المصرف عن التقاطع؟

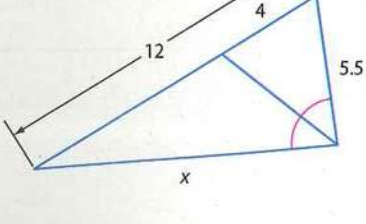



**مثال 3** **التفكير المنطقي** جـد قيمة كل متغير.

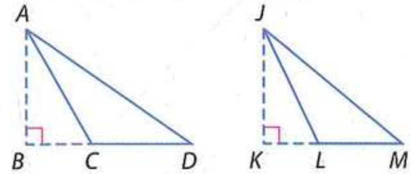
11.



12.


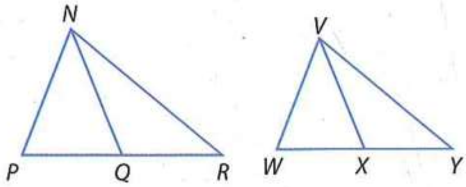

13.



14.


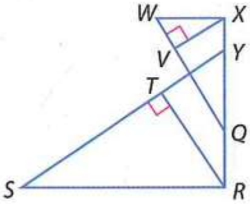
**15.** **الجبر** إذا كان $\overline{AB}$ و $\overline{JK}$ ارتفاعان، $\triangle DAC \sim \triangle MJL$ و $AB = 9$ و $AD = 4x - 8$ و $JK = 21$ و $JM = 5x + 3$. فجد $x$.




**16.** **الجبر** إذا كان $\overline{NQ}$ و $\overline{VX}$ متوسطان، و $\triangle PNR \sim \triangle WVY$ و $NQ = 8$ و $PR = 12$ و $WY = 7x - 1$ و $VX = 4x + 2$. فجد $x$.




**17.** إذا كان $\triangle WXQ \sim \triangle SRY$ وكان $\overline{RT}$ ارتفاعًا في المثلث $\triangle SRY$ وكان $\overline{XV}$ ارتفاعًا في المثلث $\triangle WXQ$ وكان $RT = 5$ وكان $RQ = 4$ وكان $QY = 6$ وكان $YX = 2$، فجد $XV$.

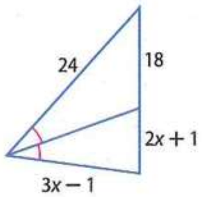



**18.** **البرهان** اكتب فقرة إثبات للنظرية 7.9.

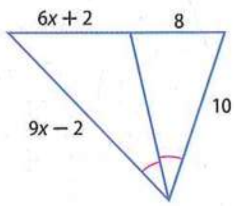
**19.** **البرهان** اكتب إثباتًا من عمودين للنظرية 7.10.

**الجبر** جـد $x$.

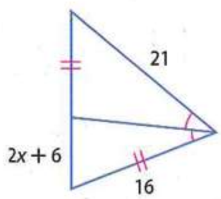
**20.**



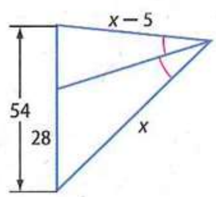

**21.**



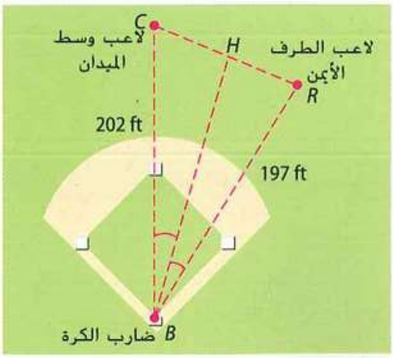

**22.**




**23.**




**24.** **الرياضة** ادرس المثلث الذي تشكل من المسار بين ضارب الكرة ولاعب وسط الميدان ولاعب الطرف الأيمن كما هو موضح. إذا حصل ضارب الكرة على ضربة تنصف المثلث عند $\angle B$، فمن أقرب للكرة، لاعب وسط الميدان أم لاعب الطرف الأيمن؟ اشرح استنتاجك.




**الفرضيات** **اكتب برهانًا من عمودين.**

**25.** النظرية 7.11

**المعطيات:** $\overline{CD}$ ينصف $\angle ACB$.

حسب معطيات الشكل، $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$.

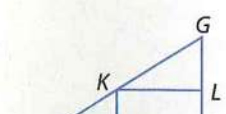
**المطلوب:** $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$


**26.**

**المعطيات:** $\angle H$ زاوية قائمة.

$L$ و $K$، و $M$ نقاط منتصف.

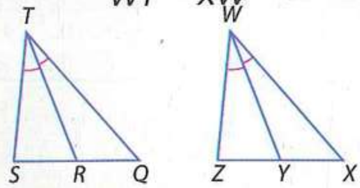
**المطلوب:** $\angle LKM$ زاوية قائمة.



**البرهان** اكتب برهاناً من عمودين.

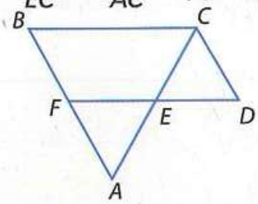
27. **المعطيات:** $\triangle QTS \sim \triangle XWZ$ و $\overline{TR}$ و $\overline{WY}$ منصفات زاوية.

**المطلوب:** $\frac{TR}{WY} = \frac{QT}{XW}$

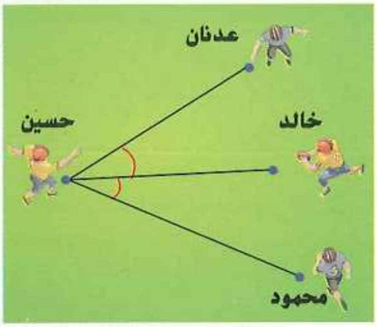



28. **المعطيات:** $\overline{BF} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AC}$ تنصف $\angle C$.

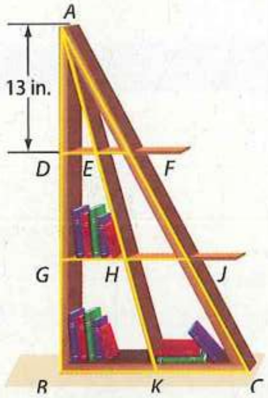
**المطلوب:** $\frac{DE}{EC} = \frac{BA}{AC}$




29. **رياضة** أثناء تمرين لكرة القدم، ركل حسين الكرة في تمريرة لخالد كما هو موضح. إذا كان محمود على بُعد أكثر من حسين عندما أكمل التمريرة لخالد وتحرك كل من عدنان ومحمود بنفس السرعة، فمن سيصل إلى خالد أولاً لإعاقته؟

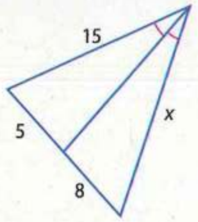



30. **صناعة الرفوف** في رف الكتب الموضح، تبلغ المسافة بين كل رف 33 cm و $\overline{AK}$ هو متوسط في $\triangle ABC$. إذا كان $EF$ يبلغ 8.5 cm، فكم يبلغ $BK$؟




## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

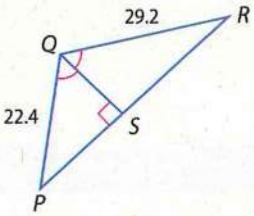
31. **تحليل الخطأ** يقوم كل من فيصل وفهد بتحديد قيمة x في الشكل. يقول فيصل، لإيجاد قيمة $x$، يتم حل التناسب $\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$، ولكن يرى فهد أنه لإيجاد $x$، يجب حل التناسب $\frac{5}{x} = \frac{8}{15}$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح.




32. **الفرضيات** جد مثالاً عكسيًا للعبارة التالية. اشرح.

*إذا كان طول ارتفاع وضلع في مثلث يتناسبان مع ارتفاع وضلع متناظرين في مثلث آخر، إذًا فالمثلثان متشابهان.*

33. **تحدٍ** محيط $\triangle PQR$ يبلغ 94 وحدة. $\overline{QS}$ ينصف $\angle PQR$. جـد $\overline{PS}$ و $\overline{RS}$.




34. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم مثلثين بحيث تكون أطوال المتوسطات المتناظرة وضلع متناظر متناسبة ولكن لا يكون المثلثان متشابهين.

35. **الكتابة في الرياضيات** قارن بين نظرية 7.9 ونظرية منصف زوايا المثلث وبيّن الفرق بينهما.

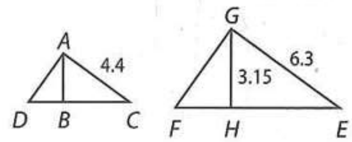
## تدريب على الاختبار المعياري

**36. الجبر** أيٌّ من التالي يظهر 0.00234 مكتوبًا بالترميز العلمي؟

**A** $2.34 \times 10^5$  **C** $2.34 \times 10^{-2}$

**B** $2.34 \times 10^3$  **D** $2.34 \times 10^{-3}$

**37. إجابة مختصرة** في الشكل أدناه، $\overline{AB} \perp \overline{DC}$ و $\overline{GH} \perp \overline{FE}$.




إذا كان $\triangle ACD \sim \triangle GEF$، فجـد $AB$.

**38.** الشكل الرباعي $HJKL$ هو عبارة عن متوازي أضلاع. إذا كانت الأقطار متعامدة، فأي عبارة هي الصحيحة؟

**F** الشكل الرباعي $HJKL$ مربع.

**G** الشكل الرباعي $HJKL$ مستطيل.

**H** الشكل الرباعي $HJKL$ معين.

**J** الشكل الرباعي $HJKL$ شبه منحرف متساوي الساقين.

**39. SAT/ACT** مجموع ثلاثة أعداد هو 180. اثنان من الأعداد متشابهان، وكل منهما يمثل ثلث العدد الأكبر. ما العدد الأقل؟

**A** 15  **D** 45

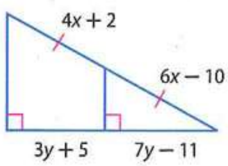
**B** 30  **E** 60

**C** 36

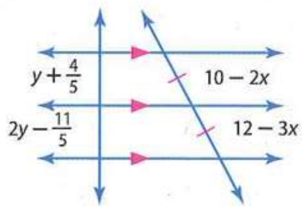
## مراجعة شاملة

**الجبر** جـد $x$ و $y$. (الدرس 7-4)

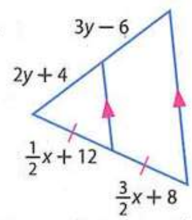
**40.**




**41.**

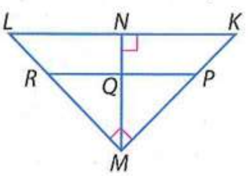



**42.**

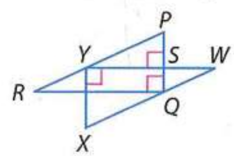



**جـد أطوال القطع المشار إليها.** (الدرس 7-3)

**43.** إذا كان $\overline{PR} \parallel \overline{KL}$ و $KN = 9$ و $LN = 16$ و $PM = 2(KP)$، فجـد KP و KM و MR و ML و MN و PR.




**44.** إذا كان $\overline{PR} \parallel \overline{WX}$ و $WX = 10$ و $XY = 6$ و $WY = 8$ و $RY = 5$ و $PS = 3$. فجـد $PY$ و $SY$ و $PQ$.




**45. الأوز** ثمة سرب من الأوز يطير في تشكيلة ما. أثبت أن $\triangle EFG \cong \triangle HFG$ إذا كان $\overline{EF} \cong \overline{HF}$ وكانت G هي نقطة منتصف $\overline{EH}$. (الدرس 7-4)

## مراجعة المهارات

**جـد المسافة بين كل زوج من النقاط.**

**46.** $E(-3, -2)$, $F(5, 8)$

**47.** $A(2, 3)$, $B(5, 7)$

**48.** $C(-2, 0)$, $D(6, 4)$

**49.** $W(7, 3)$, $Z(-4, -1)$

**50.** $J(-4, -5)$, $K(2, 9)$

**51.** $R(-6, 10)$, $S(8, -2)$

7-5

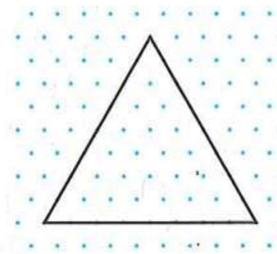
التوسيع

## مختبر الهندسة
# الأنماط الهندسية المتكررة

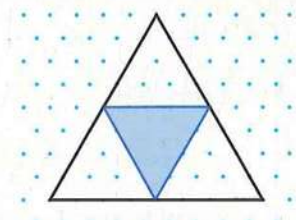
**النمط الهندسي المتكرر** هو شكل هندسي يُشكل باستخدام التكرارية. **التكرارية** هي عملية تكرار نفس العملية مرات ومرات عديدة. الأنماط الهندسية المتكررة **ذاتية التماثل**، أي أن التفاصيل الصغيرة للشكل لها نفس الخصائص الهندسية التي للشكل الأصلي.

### النشاط 1

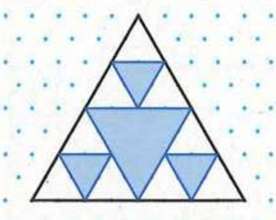
**المرحلة 0** ارسم مثلثًا متساوي الأضلاع على ورقة منقوطة متساوية القياس بحيث يبلغ طول كل ضلع 8 وحدات.



**المرحلة 1** وصّل نقاط منتصف الأضلاع لتشكيل مثلث آخر. ظلل المثلث المركزي.



**المرحلة 2** كرر العملية مستخدمًا المثلثات الثلاثة غير المظللة. وصّل نقاط منتصف الأضلاع لتشكيل ثلاثة مثلثات أخرى.



إذا كررت هذه العملية بشكل غير متناهٍ، فالشكل المتكون يُسمى مثلث سيربنسكي.

## تحليل النتائج

**1.** إذا واصلت العملية، فكم عدد المثلثات غير المظللة التي ستحصل عليها بالمرحلة 3؟

**2.** ما محيط المثلث غير المظلل في المرحلة 4؟

**3.** إذا واصلت العملية بلا نهاية، فماذا سيحدث لمحيطات المثلثات غير المظللة؟

**4.** **تحدٍ** أكمل البرهان أدناه.

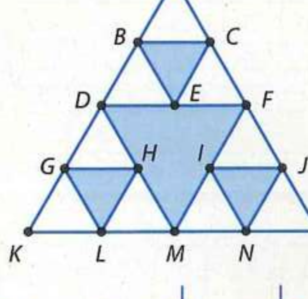
**المعطيات:** $\triangle KAP$ مثلث متساوي الأضلاع. $D$ و $F$ و $M$ و $B$ و $C$ و $E$ نقاط منتصف $\overline{KA}$ و $\overline{AP}$ و $\overline{PK}$ و $\overline{DA}$ و $\overline{AF}$ و $\overline{FD}$، على الترتيب.

**المطلوب:** $\triangle BAC \sim \triangle KAP$


**5.** يمكن رسم شجرة متكررة من خلال رسم فرعين جديدين من طرف كل فرع أصلي، وكل فرع يمثل ثلث الفرع السابق.

**a.** ارسم المرحلتين 3 و 4 لشجرة متكررة. كم إجمالي الفروع التي ستحصل عليها من المرحلة 1 حتى المرحلة 4؟ (لا تقم بعد الجذوع.)

**b.** اكتب تعبيرًا لتوقع عدد الفروع في كل مرحلة.



المرحلة 1 المرحلة 2

(يتبع في الصفحة التالية)

# مختبر الهندسة
# الأنماط الهندسية المتكررة تابع

لا تنطوي جميع عمليات التكرار على التلاعب بالأشكال الهندسية. ولكن بعض عمليات التكرار قد تفسر على أنها صيغ أو معادلات جبرية، تشبه التعبير الذي كتبته بالتمرين 5 في الصفحة السابقة.

## النشاط 2

*مثلث باسكال* هو نمط عددي بحيث يبدأ كل صف وينتهي برقم 1 وباقي الحدود الأخرى بالصف تعتبر مجموع العددين في الأعلى. أوجد صيغة بدلالة رقم الصف لأي صف في مثلث باسكال.

**الخطوة 1** ارسم صفوفًا من 1 حتى 5 من مثلث باسكال.

| صف | مثلث باسكال |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 1 |
| 3 | 1 2 1 |
| 4 | 1 3 3 1 |
| 5 | 1 4 6 4 1 |

**الخطوة 2** أوجد مجموع القيم في كل صف.

| المجموع |
|---|
| 1 |
| 2 |
| 4 |
| 8 |
| 16 |

**الخطوة 3** أوجد نمطًا باستخدام **رقم الصف** الذي يمكن استخدامه لتحديد مجموع أي صف.

**نمط**

$2^0 = 2^1 - 1$

$2^1 = 2^2 - 1$

$2^2 = 2^3 - 1$

$2^3 = 2^4 - 1$

$4^2 = 2^5 - 1$

### تحليل النتائج

**6.** اكتب صيغة لمجموع $S$ لأي صف $n$ في مثلث باسكال.

**7.** ما مجموع القيم الموجودة بالصف الثامن لمثلث باسكال؟

## تمارين

**اكتب صيغة لـ $F(x)$.**

**8.**

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 |

**9.**

| $x$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 0 | 20 | 90 | 210 | 380 |

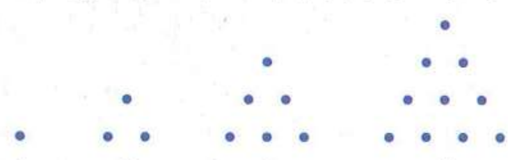
**10.**

| $x$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 1 | 0.5 | 0.25 | 0.125 | 0.1 |

**11.**

| $x$ | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

**12.** **تحدٍ** يمثل الشكل النمطي أدناه تسلسلاً لأعداد شكلية تُسمى الأعداد المثلثة. كم عدد النقاط التي نحصل عليها بالحد الثامن من المتتالية؟ هل من الممكن كتابة صيغة تُستخدم لتحديد عدد النقاط في العدد المثلثي $n$ في المتتالية؟ إذا كان الجواب بنعم، فاكتب الصيغة. وإن لم يكن كذلك، فاشرح السبب.



1 2 3 4

# تحويلات التشابه

**السابق**
- لقد تعرفت على تحويلات التطابق.

**الحالي**
1. تحديد تحويلات التشابه.
2. التحقق من التشابه بعد تحويل التشابه.

**لماذا؟**
- تستخدم عائشة آلة تصوير لتكبير تذكرة فيلم لتستخدمها خلفية في صفحة بكتيب قصاصات تذاكر الأفلام الخاص بها. وضعت التذكرة على زجاجة آلة التصوير. ومن ثم لابد أن تقرر النسبة المئوية المراد إدخالها لعمل نسخة أكبر ثلاث مرات من التذكرة الأصلية.


**المفردات الجديدة**

تغيير الأبعاد dilation

تحويل التشابه similarity transformation

مركز تغيير الأبعاد (التمدد) center of dilation

معامل تغيير الأبعاد (التمدد) scale factor of a dilation

تكبير enlargement

تصغير reduction

**ممارسات في الرياضيات**

مراعاة الدقة.

استخدام نماذج الرياضيات.

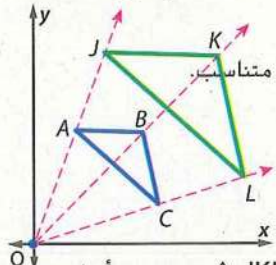
## 1 تحديد تحويلات التشابه

تذكر مما سبق أن التحويل هو عملية رسم الشكل الأصلي، إلى شكل جديد يُسمى الصورة.

**تغيير الأبعاد (التمدد)** هو تحويل يقوم بتكبير أو تصغير الشكل الأصلي بشكل متناسب. ولأن تغيير الأبعاد ينتج عنه شكل مشابه، فإنه يعتبر نوعًا من **تحويل التشابه**.

يحدث تغيير الأبعاد حول نقطة ثابتة تُسمى **مركز تغيير الأبعاد (التمدد)**.

يصف **معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدد)** مدى تغيير الأبعاد. معامل المقياس هو نسبة الطول الموجود بالصورة إلى الطول الموجود بالشكل الأصلي.




$\triangle$ JKL هو تغيير أبعاد للمثلث $\triangle$ ABC.

مركز تغيير الأبعاد: (0, 0)

معامل المقياس: $\frac{JK}{AB}$

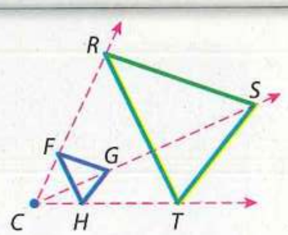
عادةً ما يمثل الحرف $k$ معامل مقياس تغيير الأبعاد. تحدد قيمة $k$ ما إذا كان تغيير الأبعاد سيؤدي إلى التكبير أم التصغير.

### ملخص المفهوم أنواع تغيير الأبعاد (التمدد)

تغيير الأبعاد الذي له معامل مقياس أكبر من 1 ينتج عنه **تكبير**، أو صورة أكبر من الشكل الأصلي.

**رموز** إذا كان $k > 1$، فينتج عن تغيير الأبعاد تكبير.

**مثال** تم تغيير أبعاد $\triangle FGH$ بمعامل مقياس يبلغ 3 لينتج $\triangle RST$. بما أن $3 > 1$، فإن $\triangle RST$ هو تكبير للمثلث $\triangle FGH$.

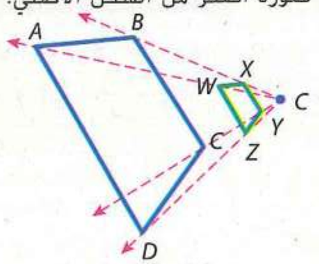



$k > 1$

تغيير الأبعاد الذي له معامل مقياس بين 0 و 1 ينتج عنه **تصغير**، أي صورة أصغر من الشكل الأصلي.

**رموز** إذا كان $0 < k < 1$، فينتج عن تغيير الأبعاد تصغير.

**مثال** تم تغيير أبعاد ABCD بمعامل مقياس يبلغ $\frac{1}{4}$ لينتج $WXYZ$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$، فإن $WXYZ$ هو تصغير $ABCD$.

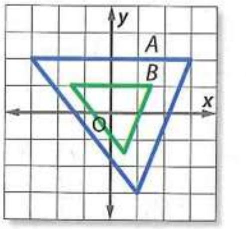



$0 < k < 1$

## مثال 1 تحديد تغيير الأبعاد (التمدد) وإيجاد معامل المقياس له

**حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد (التمدد) من $A$ إلى $B$ هو تكبير أم تصغير. ثم جـد معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدد).**

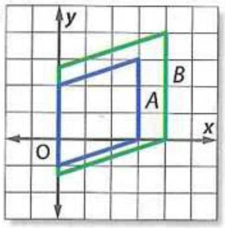
**a.**




B أصغر من A. إذًا فتغيير الأبعاد (التمدد) هو تصغير.

المسافة بين الرأسين عند $(-3, 2)$ و $(3, 2)$ بالنسبة إلى $A$ هي $6$ ومن الرأسين عند $(-1.5, 1)$ و$(1.5, 1)$ بالنسبة إلى $B$ هي $3$. إذًا فمعامل المقياس هو $\frac{3}{6}$ أو $\frac{1}{2}$.

**b.**

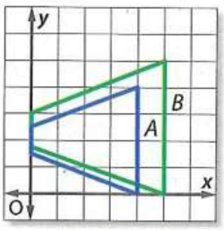



B أكبر من A، لذا فتغيير الأبعاد (التمدد) هو تكبير.

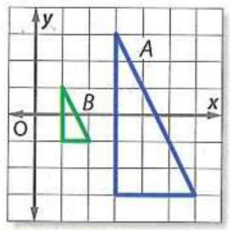
المسافة بين الرأسين عند $(3, 3)$ و $(3, 0)$ بالنسبة إلى $A$ هي $3$ وبين الرأسين عند $(4, 4)$ و $(4, 0)$ بالنسبة إلى $B$ هي $4$. إذًا فمعامل المقياس هو $\frac{4}{3}$.

### تمرين موجّه

**1A.**




**1B.**




### نصيحة دراسية

**التمثيلات المتعددة** يمكن التعبير عن معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدد) في صورة كسر أو كسر عشري أو نسبة مئوية. على سبيل المثال، فإن معامل مقياس $\frac{2}{5}$ يمكن أن يُكتب أيضًا 0.4 أو 40%.

تُستخدم تغييرات الأبعاد ومعاملات المقياس في العديد من المواقف من الحياة اليومية.

## مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد معامل المقياس واستخدامه

**الجمع راجع بداية الدرس. كم تبلغ النسبة المئوية للتكبير التي يجب على عائشة اتباعها لتكبير التذكرة بحيث تبلغ أبعاد الصورة 3 مرات أكبر من الأصلية؟ فما أبعاد الصورة المكبرة؟**


تريد عائشة إنشاء صورة ذات تغيير أبعاد للتذكرة باستخدام آلة التصوير. معامل مقياس التكبير هو 3. اكتب كنسبة مئوية، بحيث يكون معامل المقياس (3 x 100)% أو 300%. والآن جـد أبعاد الصورة المكبرة باستخدام معامل المقياس.

العرض: 5 cm **300%** = 15 cm

الطول: 6.4 cm **300%** = 19.2 cm

ستكون صورة التذكرة المكبرة 15 cm في 19.2 cm.

### تمرين موجّه

2. إن كانت صورة التذكرة الناتجة يبلغ عرضها 1.5 cm وطولها حوالي 1.9 cm فما النسبة المئوية التي استخدمتها عائشة بالخطأ في تغيير أبعاد الشكل الأصلي؟ اشرح استنتاجك.

### الربط بالحياة اليومية

قبل هيو وينج فات منافسة تحدي بجمع أكبر عدد من كعوب التذاكر لفيلم خيالي شهير. جمع 6561 كعب تذكرة في 38 يومًا!

**المصدر:** مجلة "بوث 2، إصدارات النجوم"

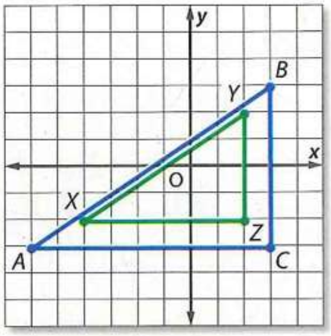
## 2 التحقق من التشابه

**التحقق من التشابه** يمكنك التحقق من أن تغيير الأبعاد ينتج شكلاً مشابهًا من خلال مقارنة الأضلاع والزوايا المتناظرة. بالنسبة للمثلثات، يمكنك أيضًا استخدام تشابه SAS.

### مثال 3 التحقق من التشابه بعد تغيير الأبعاد (التمدد)

**ارسم الشكل الأصلي والصورة بعد تغيير الأبعاد (التمدد). ثم تحقق من أن التمدد هو تحويل تشابه.**

**a. الشكل الأصلي:** $A(-6, -3)$، $B(3, 3)$، $C(3, -3)$؛ **الصورة:** $X(-4, -2)$، $Y(2, 2)$، $Z(2, -2)$



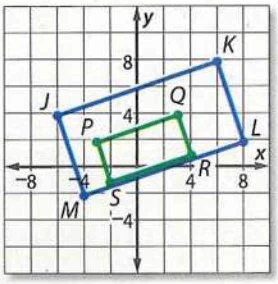

$\angle C$ و $\angle Z$ كلاهما زوايا قائمة، فإن $\angle Z \cong \angle C$. أثبت أن أطوال الأضلاع التي تتضمن $\angle C$ و $\angle Z$ متناسبة.

استخدم الشبكة الإحداثية لإيجاد أطوال الأضلاع.

$\frac{XZ}{AC} = \frac{6}{9}$ أو $\frac{2}{3}$ و $\frac{YZ}{BC} = \frac{4}{6}$ أو $\frac{2}{3}$ إذًا $\frac{XZ}{AC} = \frac{YZ}{BC}$.

بما أن أطوال الأضلاع التي تتضمن الزاوية $\angle C$ والزاوية $\angle Z$ متناسبة، فإن $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ حسب تشابه SAS.

**b. الشكل الأصلي:** $J(-6, 4)$، $K(6, 8)$، $L(8, 2)$، $M(-4, -2)$؛
**الصورة:** $P(-3, 2)$، $Q(3, 4)$، $R(4, 1)$، $S(-2, -1)$




استخدم قانون المسافة لإيجاد طول كل ضلع.

$JK = \sqrt{[6-(-6)]^2 + (8-4)^2} = \sqrt{160}$ أو $4\sqrt{10}$

$PQ = \sqrt{[3-(-3)]^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$KL = \sqrt{(8-6)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{40}$ أو $2\sqrt{10}$

$QR = \sqrt{(4-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$

$LM = \sqrt{(-4-8)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{160}$ أو $4\sqrt{10}$

$RS = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{40}$ أو $2\sqrt{10}$

$MJ = \sqrt{[-6-(-4)]^2 + [4-(-2)]^2} = \sqrt{40}$ أو $2\sqrt{10}$

$SP = \sqrt{[-3-(-2)]^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{10}$

جـــد نسب الأضلاع المتناظرة وقارن بينهما.

$\frac{PQ}{JK} = \frac{2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{QR}{KL} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{RS}{LM} = \frac{2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{SP}{MJ} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$

PQRS و JKLM مستطيلان. يمكن إثبات ذلك من خلال إثبات أن الأقطار $\overline{PR} \cong \overline{SQ}$ و $\overline{JL} \cong \overline{KM}$ متطابقة باستخدام قانون المسافة. بما أن كلاهما مستطيل، فإن زواياهما المتناظرة متطابقة.

بما أن $\frac{PQ}{JK} = \frac{QR}{KL} = \frac{RS}{LM} = \frac{SP}{MJ}$ والزوايا المتناظرة متطابقة، إذًا $PQRS \sim JKLM$.

**تمرين موجّه**

**3A.** الشكل الأصلي: $A(2, 3)$، $B(0, 1)$، $C(3, 0)$
الصورة: $D(4, 6)$، $F(0, 2)$، $G(6, 0)$

**3B.** الشكل الأصلي: $H(0, 0)$، $J(6, 0)$، $K(6, 4)$، $L(0, 4)$
الصورة: $W(0, 0)$، $X(3, 0)$، $Y(3, 2)$، $Z(0, 2)$

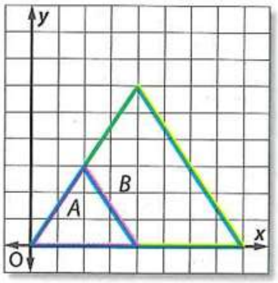
**نصيحة دراسية**

**مركز تغيير الأبعاد** ما لم يُذكر خلاف ذلك، فإن جميع تغييرات الأبعاد (التمدد) على المستوى الإحداثي تستخدم الصورة الأصل كمركز تغيير الأبعاد (التمدد).

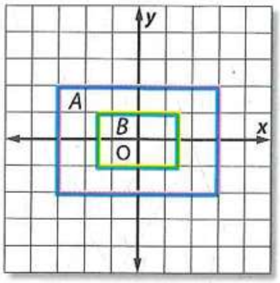
## التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد (التمدد) من *A* إلى *B* هو تكبير أم تصغير. ثم جـد معامل التمدد.**

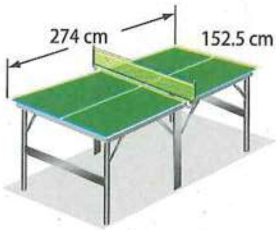
1.




2.

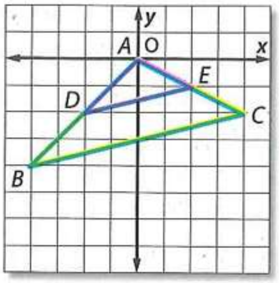



مثال 2 **3** ألعاب تبلغ أبعاد ملعب التنس 27 ft في 78 ft. وتبلغ أبعاد طاولة كرة التنس 152.5 cm في 274 cm. فهل تعتبر طاولة كرة التنس تغيير أبعاد (تمدد) من ملعب التنس؟ إن كان ذلك، فما معامل المقياس؟ اشرح.

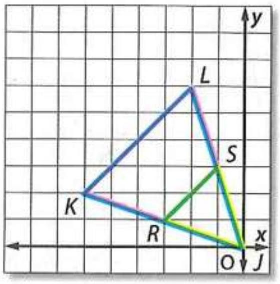



مثال 3 **الفرضيات تحقق من أن تغيير الأبعاد (التمدد) هو تحويل تشابه.**

4.



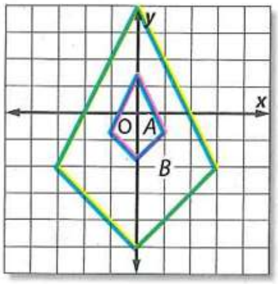

5.



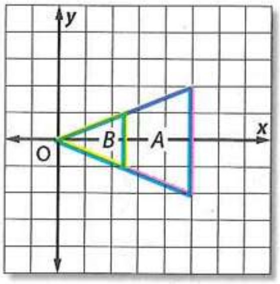

## التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد (التمدد) من *A* إلى *B* هو تكبيرأم تصغير. ثم جـد معامل التمدد.**

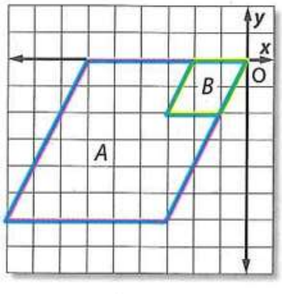
6.



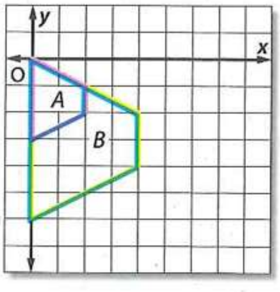

7.




8.

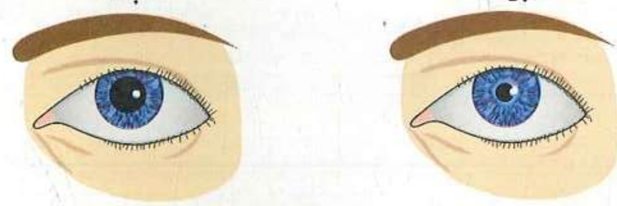



9.



حدد ما إذا كان كل تغيير أبعاد (تمدد) *تكبيرًا* أم *تصغيرًا*.

**10.** قبل بعد

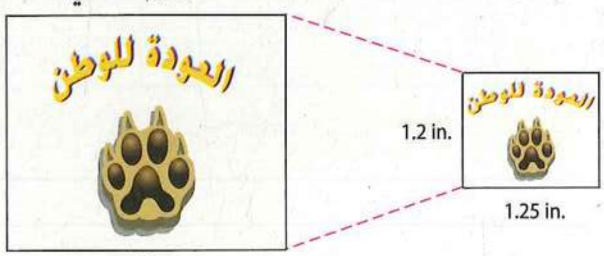


**11.** لوحة بطاقة بريدية

مثال 2

**12.** **الكتاب السنوي** تضع موزة شعار لفريق لعبة البطاقات في تصميم بكامل الصفحة في الكتاب السنوي. يبلغ مقاس الشكل الأصلي 4 cm في 6 cm. إذا كانت الصورة في الكتاب السنوي تبلغ $6\frac{2}{3}$ cm في 10 cm، فهل تعتبر صورة الكتاب السنوي تغيير أبعاد من الشكل الأصلي؟ إن كان كذلك، فما هو معامل المقياس؟ اشرح.

**13.** **استخدام النماذج** صممت فاطمة رسمًا للعبة العودة للوطن كما هو موضح. فهل يعتبر الرسم تغيير أبعاد من التصميم الأصلي؟ إن كان ذلك، فما معامل المقياس؟ اشرح.




مثال 3

**ارسم الشكل الأصلي والصورة المغيرة الأبعاد بيانيًا. ثم تحقق من أن تغيير الأبعاد (التمدد) هو تحويل تشابه.**

**14.** $M(1, 4), P(2, 2), Q(5, 5); S(-3, 6), T(0, 0), U(9, 9)$

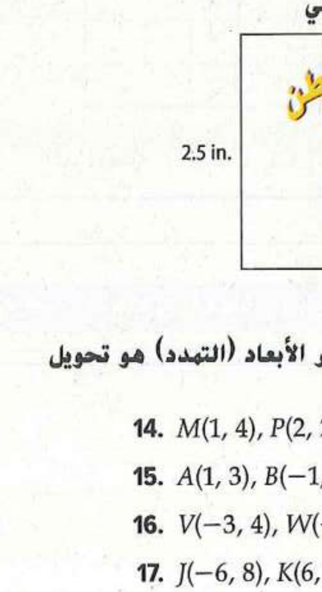
**15.** $A(1, 3), B(-1, 2), C(1, 1); D(-7, -1), E(1, -5)$

**16.** $V(-3, 4), W(-5, 0), X(1, 2); Y(-6, -2), Z(3, 1)$

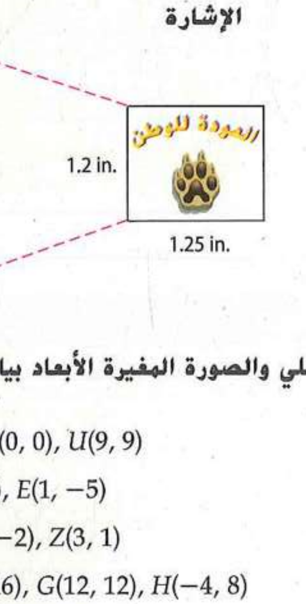
**17.** $J(-6, 8), K(6, 6), L(-2, 4); D(-12, 16), G(12, 12), H(-4, 8)$

**إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle AYZ$، فجد الإحداثي المجهول.**

**18.**




**19**

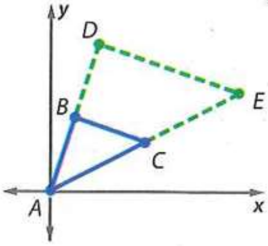


20. **فن التمثيل البياني** رسمت فاطمة نموذج اللافتة الموضح باستخدام $\frac{1}{2}$ زجاجة ألوان. واللافتة الحقيقية التي تريد رسمها على نافذة أحد المحال تبلغ 3 ft في $7\frac{1}{2}$ ft.


**a.** فسر لماذا تعتبر اللافتة الحقيقية تغيير أبعاد (تمدد) من النموذج الذي صنعته.

**b.** كم عدد زجاجات الألوان التي تحتاجها فاطمة لإكمال اللافتة الحقيقية؟

21. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف تشابه المثلثات على المستوى الإحداثي.




**a. هندسيًا** ارسم مثلثًا مع جعل الرأس $A$ على الشكل الأصلي. تأكد من أن الرأسين الآخرين $B$ و $C$ لهما إحداثيات أعداد كلية. ارسم مثلثًا متشابهًا يكون ضعف حجم المثلث $\triangle ABC$ مع وضع رؤوسه أيضًا على المثلث الأصلي. قم بتسمية المثلث $ADE$.

**b. هندسيًا** كرر العملية بالجزء **a** مرتين. قم بتسمية الزوجين رقم اثنين من المثلثات $MNP$ و $MQR$ والزوجين رقم ثلاثة $TWX$ و $TYZ$. استخدم معامل مقياس مختلفًا عن الجزء **a**.

**c. جدوليًا** انسخ الجدول أدناه وأكمله بالقيم المناسبة.

| إحداثيات | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\triangle ABC$ | | $\triangle ADE$ | | $\triangle MNP$ | | $\triangle MQR$ | | $\triangle TWX$ | | $\triangle TYZ$ | |
| $A$ | | $A$ | | $M$ | | $M$ | | $T$ | | $T$ | |
| $B$ | | $D$ | | $N$ | | $Q$ | | $W$ | | $Y$ | |
| $C$ | | $E$ | | $P$ | | $R$ | | $X$ | | $Z$ | |

**d. لفظيًا** قم بتخمين كيف يمكن توقع إحداثيات مثلث تغير أبعاده بمعامل مقياس **n** إن كان المثلثان المتشابهان يتشاركان رأسًا متناظرة بالمثلث الأصلي.

## مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

22. **تحدٍ** $MNOP$ هو تغيير أبعاد $ABCD$. ما العلاقة بين معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدد) ونسبة تشابه $ABCD$ إلى $MNOP$؟ وضّح استنتاجك.

23. **التبر** إحداثيات مثلثين موضحة بالجدول على اليسار. هل $\triangle XYZ$ يعتبر تغيير أبعاد من المثلث $\triangle PQR$؟ اشرح.

| $\triangle PQR$ | | $\triangle XYZ$ | |
|---|---|---|---|
| $P$ | $(a, b)$ | $X$ | $(3a, 2b)$ |
| $Q$ | $(c, d)$ | $Y$ | $(3c, 2d)$ |
| $R$ | $(e, f)$ | $Z$ | $(3e, 2f)$ |

**مسألة غير محددة الإجابة اذكر مثالاً من الحياة اليومية لكل عملية تحويل بخلاف الأمثلة المذكورة في هذا الدرس.**

24. تكبير
25. تصغير
26. تحويل تطابق

27. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن استخدام معامل مقياس لتحديد ما إذا كان التحويل هو تكبير أو تصغير أو تحويل تطابق.

## تدريب على الاختبار المعياري

**28. الجبر** أي معادلة تصف المستقيم المار بالنقطة $(-3, 4)$ وعمودي على $3x - y = 6$؟

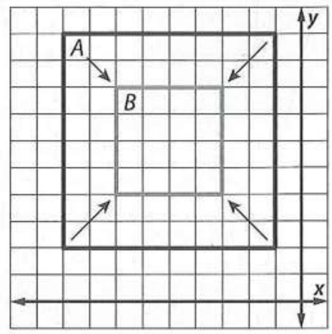
**A** $y = -\frac{1}{3}x + 4$

**B** $y = -\frac{1}{3}x + 3$

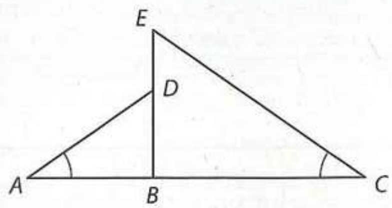
**C** $y = 3x + 4$

**D** $y = 3x + 3$

**29. إجابة قصيرة** ما هو معامل مقياس تغيير الأبعاد الموضح أدناه؟




**30.** في الشكل أدناه، $\angle A \cong \angle C$.




ما المعلومة الإضافية التي قد لا تكون كافية لإثبات أن $\triangle ADB \sim \triangle CEB$؟

**F** $\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{EB}$

**G** $\angle ADB \cong \angle CEB$

**H** $\overline{ED} \cong \overline{DB}$

**J** $\overline{EB} \perp \overline{AC}$

**31. SAT/ACT** $x = \frac{6}{4p + 3}$ و $y = \frac{3}{4p + 3}$، $xy =$

**A** 4

**B** 2

**C** 1

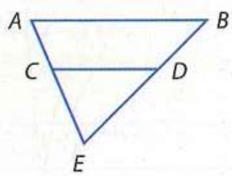
**D** $\frac{3}{4}$

**E** $\frac{1}{2}$

## مراجعة شاملة

**32. المناظر الطبيعية** تُصمم عبير حديقتين على شكل مثلثين متشابهين. يبلغ محيط إحدى الحدائق 53.5 ft، وأطول أضلاعها 25 ft. وهي تريد أن يبلغ محيط الحديقة الثانية 32.1 ft. أوجد طول الضلع الأطول بهذه الحديقة. (الدرس 5-7)

**حدد ما إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. علل إجابتك.** (الدرس 4-7)



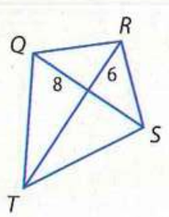

**33.** AC = 8.4 و BD = 6.3 و DE = 4.5 و CE = 6

**34.** AC = 7 و BD = 10.5 و BE = 22.5 و AE = 15

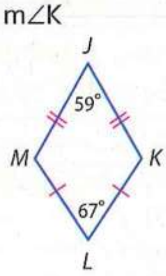
**35.** AB = 8 و AE = 9 و CD = 4 و CE = 4

**إذا كان كل شكل عبارة عن طائرة ورقية، فجـد قيمة كل قياس.**

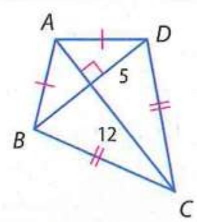
**36.** QR




**37.** m∠K




**38.** BC




**39. البرهان** اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة التالية.

*إذا كانت قطعة مستقيمة توصل بين نقطتي المنتصف في ضلعي مثلث، فإنها تكون موازية للضلع الثالث.*

## مراجعة المهارات

**حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

**40.** $145 = 29 \cdot t$

**41.** $216 = d \cdot 27$

**42.** $2r = 67 \cdot 5$

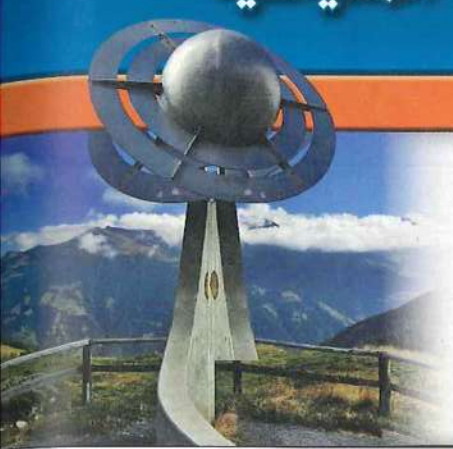
**43.** $100t = \frac{70}{240}$

**44.** $\frac{80}{4} = 14d$

**45.** $\frac{2t + 15}{t} =$

الدرس

# 7-7 مقياس الرسم والنماذج المقياسية



| ∴ السابق | ∴ الحالي | ∴ لماذا؟ |
|---|---|---|
| ● لقد استخدمت معاملات المقياس في حل المسائل ذات المضلعات المتشابهة. | ● 1 تفسير النماذج المقياسية. <br> 2 استخدام معاملات مقياس الرسم في حل المسائل. | ● في سانت لوسيا بسويسرا، قام الفنان السويسري، لوشيمي، بإنشاء نموذج بمقياس نسبي لكل كوكب بالمجموعة الشمسية. وهو أحد أكبر النماذج المقياسية الكاملة ثلاثية الأبعاد للمجموعة الشمسية. وكان قطر مركز نموذج كوكب زُحل 121 mm؛ قطر الكوكب الحقيقي حوالي 121,000 km. |

## المفردات الجديدة

نموذج بمقياس نسبي
**scale model**
مقياس رسم نسبي
**scale drawing**
مقياس الرسم **scale**

**ممارسات في الرياضيات**
استخدام نماذج الرياضيات.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

**1 نماذج مقياسية** **نموذج بمقياس نسبي** أو **رسم بمقياس نسبي** عبارة عن جسم أو رسم ذي أطوال متناسبة مع الجسم الأصلي الذي تمثله. مقياس النموذج أو الرسم هو النسبة بين الطول على النموذج أو الرسم والطول الحقيقي للجسم المُمثل أو المرسوم.

### مثال 1 استخدام مقياس الرسم


**خرائط المقياس المستخدم في الخريطة الموضحة هو 1 cm : 64.4 km. جد المسافة الحقيقية من ناشفيلي إلى ممفيس.**

استخدام مسطرة. تبلغ المسافة بين ناشفيلي وممفيس 3.8 cm.

**الطريقة 1** كتابة تناسب وحله.

افترض أن x يمثل المسافة بين ناشفيلي وممفيس.

**المقياس ناشفيلي إلى ممفيس**

$$\frac{1\text{ cm}}{64.4\text{ km}} = \frac{3.8\text{ cm}}{x\text{ km}}$$ الخريطة / الحقيقي ← → الخريطة / الحقيقي

$1 \times x = 64.4 \times 3.8$ خاصية الضرب التبادلي

$x = 241.4$ بسّط.

**الطريقة 2** كتابة معادلة وحلها.

افترض أن $a$ = هي المسافة الحقيقية بالكيلوميتر بين ناشفيلي وممفيس وأن $m$ = المسافة على الخريطة بالسنتيمتر. اكتب المقياس $\frac{64.4\text{ km}}{1\text{ cm}}$، أي $64.4 \div 1$ أو 64.4 km لكل سنتيمتر.

لذا، فلكل سنتيمتر على الخريطة، تكون المسافة الحقيقية 64.4 km.

$a = 64.4 \times m$ كتابة معادلة.

$= 64.4 \times 3.8$ $m = 3.8$ cm

$= 241.4$ الحل.

**تحقق** استخدم التحليل البُعدي.

$$\text{km} = \frac{\text{km}}{\text{cm}} \times \text{cm} \Rightarrow \text{km} = \text{km} \checkmark$$

المسافة بين ناشفيلي وممفيس 241.4 km.

**تمرين موجّه**

1. **خرائط** جـد المسافة الحقيقية بين ناشفيلي وكتانوجا.

## 2 استخدام معاملات مقياس الرسم

يكتب معامل مقياس الرسم للرسم أو النموذج في صورة نسبة لا بعدية في أبسط صورة. دائمًا ما تكتب معاملات المقياس بحيث يأتي طول النموذج في النسبة أولاً.

### مثال 2 إيجاد مقياس الرسم

**النموذج المقياسي هذا نموذج مصغر لسيارة أجرة تابعة لشركة شيكر عام 1923. ويبلغ طول النموذج 16.5 cm. وكان يبلغ الطول الحقيقي للسيارة 4 m.**

**a. ما مقياس النموذج؟**

لإيجاد المقياس، اكتب نسبة طول النموذج إلى الطول الحقيقي.

$$\frac{\text{طول النموذج}}{\text{الطول الحقيقي}} = \frac{1\text{ cm}}{0.24\text{ m}} \quad \frac{16.5\text{ cm}}{4\text{ m}}$$

يبلغ مقياس النموذج 1 cm:0.24 m.

**b. كم ضعفًا يبلغ النموذج من طول السيارة الحقيقية؟**

للإجابة عن هذا السؤال، جـد معامل مقياس النموذج. اضرب في عامل تحويل يربط البوصة بالقدم للحصول على نسبة لا بُعدية.

$$\frac{1\text{ cm}}{0.24\text{ m}} = \frac{1\text{ cm}}{0.24\text{ m}} \times \frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}} = \frac{1}{24}$$

إذًا، فمعامل مقياس الرسم هو 1:24 . وعليه، فيبلغ النموذج $\frac{1}{24}$ من طول السيارة الحقيقية.

#### تمرين موجّه

**2. نموذج بمقياس رسم نسبي** صنع طلاب صف التاريخ تحت إشراف السيد عبد الرحمن نموذجًا مقياسيًا لمبنى يبلغ 0.9 m طولاً. الطول الحقيقي للمبنى يبلغ 10.2 m

**A.** ما مقياس النموذج؟

**b.** كم ضعفًا يبلغ طول النموذج من المبنى الحقيقي؟
كم ضعفًا يبلغ طول المبنى الحقيقي من النموذج؟

> **نصيحة دراسية**
>
> **انتظام** إن معامل مقياس النموذج الذي هو أصغر من الجسم الأصلي يكون بين 0 و 1 ومعامل مقياس النموذج الذي هو أكبر من الجسم الأصلي يكون أكبر من 1.

### مثال 3 من الحياة اليومية عمل نموذج مقياسي

**نموذج مقياسي افترض أنك تريد عمل نموذج لقوس جيت واي لا يزيد عن 28 cm طولاً. اختر مقياسًا مناسبًا واستخدمه لتحديد ارتفاع النموذج. استخدم المعلومات الموضحة على اليمين.**

يبلغ ارتفاع القوس الحقيقي 192 m طولاً. بما أن 192 m÷ 28 cm = 6.86m ، فإن مقياس 1 cm = 7 m يعتبر مقياسًا مناسبًا. إذًا، لكل 1 cm في النموذج m، اجعل القياس الحقيقي 7 m. اكتب ذلك في معادلة.

$a = 7 \times m$ — اكتب معادلة.

$192 = 7 \times m$ — $a = 630$

$27.4 = m$ — لذا فارتفاع النموذج يكون 27.4 cm

#### تمرين موجّه

**3. رسم بمقياس نسبي** تقوم فتحية بصناعة رسم بمقياس نسبي لغرفتها على ورقة مساحتها 8.5 in في 11 in. إذا كانت غرفتها 14 ft في 12 ft، فجـد المقياس المناسب للرسم وحدد أبعاده.

> **الربط بالحياة اليومية**
>
> يعتبر معلم قوس جيت واي هو الأطول بالولايات المتحدة حيث يبلغ 192 m. كما يبلغ امتداد قاعدته أيضًا 192 m. يزن القوس 17,246 طنًا ويمكن أن يتأرجح بحد أقصى 22.9 cm في كل اتجاه في أوقات الرياح الشديدة.
>
> **المصدر:** حقائق عن قوس جيت واي

## التحقق من فهمك

مثال 1

**خرائط استخدم خريطة ولاية ماين الموضحة ومسطرة تقليدية لإيجاد المسافة الحقيقية بين كل زوجين من المدن. قم بالقياس لأقرب جزء من ستة عشر من البوصة.**


**1.** بانجور وبورتلاند

**2.** أوغوستا وهولتون

مثال 2

**3.** **نماذج مقياسية** صنع عمر نموذجًا بمقياس نسبي لجسر محلي. يمتد النموذج 6 in؛ ويمتد الجسر الحقيقي 50 ft.

**a.** ما مقياس النموذج؟

**b.** ما معامل المقياس الذي استخدمه عمر في بناء النموذج؟

مثال 3

**4.** **رياضة** يبلغ ملعب كرة الطائرة 9 m عرضًا و 18 m طولاً. اختر مقياسًا مناسبًا واصنع رسمًا بمقياس نسبي للملعب يصلح لبطاقة فهرسة أبعادها 3 cm في 5 cm.

## التمرين وحل المسائل

مثال 1

**استخدام النماذج استخدم خريطة ولاية أوكلاهوما الموضحة ومسطرة مترية لإيجاد المسافة الحقيقية بين كل زوجين من المدن. قرِّب إلى أقرب عشرة من السنتيمترات.**


**5.** مدينتا جويمون وأوكلاهوما

**6.** لاوتن وتولسا

**7.** إيند وتولسا

**8.** مدينة بونكا وشاوني

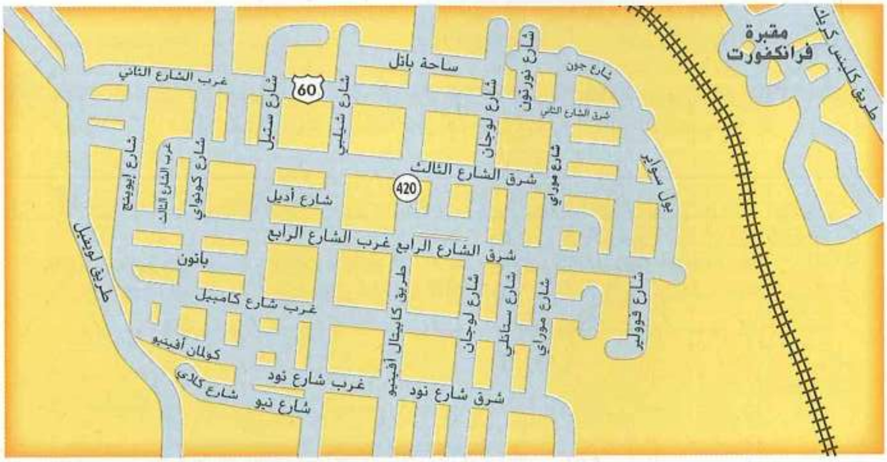
مثال 2

**9** **النحت** نموذج مصغر لأحد التماثيل الشهيرة يبلغ طوله 10 in. ويبلغ طول التمثال الأصلي 10 ft.

**a.** ما مقياس النموذج المصغر؟

**b.** كم ضعفًا يبلغ طول النموذج المصغر من التمثال الحقيقي؟

**10.** **خرائط** توضح الخريطة أدناه جزءًا من مدينة فرانكفورت، كنتاكي.




**a.** إذا كانت المسافة الحقيقية بين تقاطع شارع كونواي مع الشارع الرابع وتقاطع شارع موراي مع الطريق الرابع 0.47 mi. استخدم مسطرة تقليدية لتقدير مقياس الخريطة.

**b.** ما هو معامل المقياس التقريبي للخريطة؟ فسر دلالته.

**مثال 3**

**رياضة** **اختر مقياسًا مناسبًا واصنع رسمًا بمقياس نسبي لكل منطقة لعب بحيث يتناسب هذا الرسم مع ورقة مقاس 8.5 in في 11 in.**

**11.** منطقة الرمي في البيسبول هي عبارة عن مربع حيث يبلغ كل ضلع 90 m وحوالي 128 m للقطر.

**12.** هناك ملعب في إحدى المدارس الثانوية على شكل مستطيل وبطول 84 m وعرض 50 m.

**استخدام النماذج** **استخدم الخريطة الموضحة ومسطرة بالبوصة للإجابة على كل سؤال. قم بالقياس لأقرب ستة عشر من البوصة وافترض أنه يمكنك السفر بطول أي خط مستقيم.**

**13.** فكم يبلغ الوقت الذي تستغرقه السيارة في الانتقال من فالدوستا بولاية جورجيا إلى شاطئ دايتونا بولاية فلوريدا، عندما تكون القيادة على سرعة 65 mi/h؟

**14.** فكم يبلغ الوقت الذي تستغرقه السيارة في الانتقال من جينسفيللي إلى ميامي بولاية فلوريدا، عندما تكون القيادة على سرعة 70 mi/h؟


**15.** **نماذج مقياسية** إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس تبلغ فعليًا 150,000,000 km، فكم تبعد الأرض عن الشمس إذا استخدمنا نموذجًا يبلغ مقياسه 1:93,000,000؟

**16.** **أدب** في الكتاب،مغامرات أليس في بلاد العجائب، يتغير حجم أليس عن طولها الطبيعي البالغ حوالي 50 in. لنفترض أن أليس تمر من باب طوله حوالي 15 in وتغير طولها إلى 10 in.

**a.** جـــد نسبة طول الباب إلى طول أليس في بلاد العجائب.

**b.** كم سيبلغ طول الباب في العالم الطبيعي لأليس؟

**17** **صواريخ** اشترى طارق نموذجًا بمقياس $\frac{1 \text{ in.}}{12 \text{ ft}}$ لصاروخ محطة ميركري ريدستون.

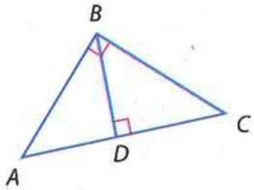
**a.** إذا كان ارتفاع النموذج 7 in. فما الارتفاع التقريبي للصاروخ؟

**b.** إذا كان قطر الصاروخ 70 in. فما قطر النموذج؟ قرّب إلى أقرب نصف بوصة.

**18. هندسة معمارية** يبلغ طول نموذج مصغر لأحد التماثيل الشهيرة $16\frac{3}{4}$ ft .

إذا كان معامل مقياس النموذج المصغر إلى التمثال الحقيقي يبلغ 1:9، فكم يبلغ طول التمثال الحقيقي بميناء نيويورك؟

**19 مدينة ملاهي** يبلغ طول برج إيفل في باريس، فرنسا، 986 ft، بدون الهوائي. تم بناء نموذج مصغر لبرج إيفل لعمل جولة به في إحدى مدن الملاهي. إذا كان معامل مقياس النموذج المصغر إلى البرج الحقيقي يبلغ 1:3 تقريبًا، فكم يبلغ طول الجولة؟




**20. التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف ارتفاعات المثلثات القائمة.

a. **هندسيًا** ارسم مثلثًا قائم الزاوية $\triangle ABC$ بحيث تكون الزاوية القائمة عند الرأس $B$. ارسم الارتفاع $\overline{BD}$. ارسم مثلثًا قائم الزاوية $\triangle MNP$، حيث الزاوية القائمة $N$ وارسم الارتفاع $\overline{NQ}$، ومثلثًا قائم الزاوية $\triangle WXY$، حيث الزاوية القائمة $X$ وارسم الارتفاع $\overline{XZ}$.

b. **جدوليًا** قم بقياس الزوايا المشار إليها وتسجيلها بالجدول أدناه.

| | قياس الزاوية | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\triangle ABC$ | $\triangle ABC$ | | $\triangle BDC$ | | $\triangle ADB$ | |
| | ABC | | BDC | | ADB | |
| | A | | CBD | | BAD | |
| | C | | DCB | | DBA | |
| $\triangle MNP$ | $\triangle MNP$ | | $\triangle NQP$ | | $\triangle MQN$ | |
| | MNP | | NQP | | MQN | |
| | M | | PNQ | | NMQ | |
| | P | | QPN | | QNM | |
| $\triangle WXY$ | $\triangle WXY$ | | $\triangle WZX$ | | $\triangle XZY$ | |
| | WXY | | WZX | | XZY | |
| | W | | XWZ | | YXZ | |
| | Y | | ZXW | | ZYX | |

c. **الكلمات** قم بتخمين ارتفاع مثلث قائم يبدأ من الزاوية القائمة بهذا المثلث.

## مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا

**21. تحليل الخطأ** قام كل من عبد العزيز وطارق بعمل نموذج مصغر لمبنى مدرستهم الثانوية. يبلغ طول مبنى المدرسة الثانوية 75 ft والنموذج المصغر 1.5 ft. يزعم عبد العزيز أن معامل المقياس للمبنى الحقيقي إلى النموذج المصغر هو 50:1، بينما يقول طارق إن معامل المقياس 1:50. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

**22. تحدٍ** يمكنك عمل نموذج بمقياس نسبي لجسم معين من خلال تغيير كل بُعد وفقًا لعدد ثابت. ما المفترض أن يكون صحيحًا بالنسبة لشكل الجسم؟ اشرح استنتاجك.

**23. التفكير المنطقي** تصنع منى اثنين من الرسومات المقياسية لغرفة الغداء. في الرسم الأول، استخدمت منى مقياسًا يبلغ 1 in = 1 ft، وبالرسم الثاني استخدمت مقياسًا يبلغ 1 cm = 6 m. أي مقياس سوف يُنتج رسمًا أكبر؟ ما معامل مقياس الرسم الأول بالنسبة للرسم الثاني؟ اشرح.

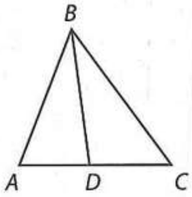
**24. مسألة غير محددة الإجابة** ارسم نموذجًا مقياسيًا للصف باستخدام أي مقياس.

**25. الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين المقياس ومعامل المقياس.

## تدريب على الاختبار المعياري

**26. إجابة مختصرة** إذا كان $3^x = 27^{(x-4)}$ ، فما قيمة $x$؟

**27.** في المثلث $\triangle ABC$، $\overline{BD}$ متوسط. إذا كان $AD = 3x + 5$ و $CD = 5x - 1$، فجد $AC$.




**A** 6 **C** 14

**B** 12 **D** 28

**28.** في مثلث، تبلغ النسبة بين أطوال الأضلاع 4:7:10 وأطول أضلاعه 40 cm. جد محيط المثلث بالسنتيمتر.

**F** 37 cm **H** 84 cm

**G** 43 cm **J** 168 cm

**29. SAT/ACT** إذا كانت منال تستطيع كتابة 80 كلمة في دقيقتين، فكم ستستغرق لكتابة 600 كلمة؟

**A** 30 min **D** 10 min

**B** 20 min **E** 5 min

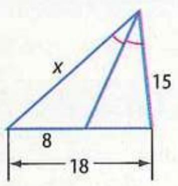
**C** 15 min

## مراجعة شاملة

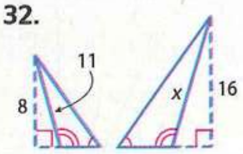
**30. رسم** يرسم عبيد صورة شخصية لصديق في مادة التربية الفنية. ولأن صديقه لا يملك الوقت ليبقى أمامه بشخصه، فاستخدم صورة بمقاس 6 cm في 8 cm. إذا كانت اللوحة بمقاس 24 cm في 32 cm، فهل اللوحة تعتبر تغيير أبعاد من الصورة الأصلية؟ إن كان ذلك، فما معامل المقياس؟ اشرح. (الدرس 6-7)

**جد** $x$. (الدرس 5-7)

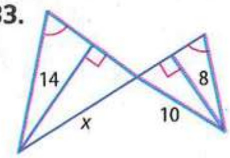
**31.**



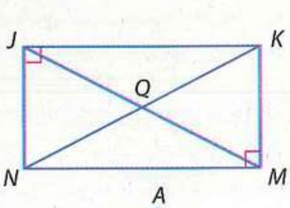

**32.**




**33.**




**الجبر** **الشكل الرباعي $JKMN$ مستطيل.**

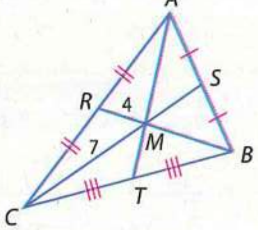



**34.** إذا كان $NQ = 2x + 3$ و $QK = 5x - 9$، فجد $JQ$.

**35.** إذا كان $m\angle NJM = 2x - 3$ و $m\angle KJM = x + 5$، فجد $x$.

**36.** إذا كان $NM = 8x - 14$ و $JK = x^2 + 1$، فجد $JK$.

**بالمثلث $\triangle ABC, MC = 7$ و $RM = 4$ و $AT = 16$. جد قياس كل مما يلي.**




**37.** $MS$ **38.** $AM$ **39.** $SC$

**40.** $RB$ **41.** $MB$ **42.** $TM$

**حدد ما إذا كان $\triangle JKL \cong \triangle XYZ$ . اشرح.**

**43.** $J(3, 9), K(4, 6), L(1, 5), X(1, 7), Y(2, 4), Z(-1, 3)$

**44.** $J(-1, -1), K(0, 6), L(2, 3), X(3, 1), Y(5, 3), Z(8, 1)$

## مراجعة المهارات

**بسّط كل من التعابير الآتية:.**

**45.** $\sqrt{4\times16}$ **46.** $\sqrt{3\times27}$ **47.** $\sqrt{32\times72}$ **48.** $\sqrt{15\times16}$ **49.** $\sqrt{33\times21}$

الوحدة

# 7 دليل الدراسة والمراجعة

## دليل الدراسة

### المفاهيم الأساسية

**التناسبات** (الدرس 7-1)

- بالنسبة لأي عددين $a$ و $c$ وأي عددين غير صفريين $b$ و $d$، يكون $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فقط في حالة إذا كان $ad = bc$.

**المضلعات والمثلثات المتشابهة** (الدرسان 7-2 و 7-3)

- يقال عن مضلعين إنهما متشابهان فقط في حالة إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة وكانت مقاييس أضلاعهما المتناظرة متناسبة.
- يصبح المثلثان متشابهين إذا:

AA: كانت زاويتان في المثلث الأول متطابقتين مع زاويتين في المثلث الآخر.

SSS: قياسات الأضلاع المتناظرة للمثلثين متناسبة.

SAS: قياسا ضلعين في المثلث الأول متناسبان مع قياسي الضلعين المتناظرين في المثلث الآخر والزاويتين المحصورتين بين هذه الضلعين متطابقتين.

**الأجزاء المتناسبة** (الدرسان 7-4 و 7-5)

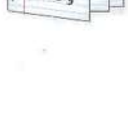
- إذا توازى مستقيم مع أحد أضلاع مثلث وكان يقطع الضلعين الآخرين في نقطتين متمايزتين ، فإنه يقسّم كلاً من هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة متناسبة الأطوال.
- منصف المثلث يكون موازيًا لأحد أضلاع المثلث ويبلغ طوله نصف طول هذا الضلع.
- يصبح المثلثان متشابهين عندما يتناسب كل من التالي في المقياس: المحيطات والارتفاعات المتناظرة ومنصفات الزوايا المتناظرة والمتوسطات المتناظرة لهما.

**تحويلات التشابه والرسومات والنماذج المقياسية** (الدرسان 7-6 و 7-7)

- للنموذج ذي المقياس النسبي أو الرسم ذي المقياس النسبي أطوال متناسبة مع الأطوال المتناظرة في الجسم الذي يمثله النموذج أو الرسم.

### مطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.




### المفردات الأساسية

| | |
|---|---|
| الضرب التبادلي cross products | تصغير reduction |
| تغيير الأبعاد(التمدد) dilation | المقياس scale |
| تكبير enlargement | مقياس رسم نسبي scale drawing |
| طرفا التناسب extremes | معامل مقياس الرسم scale factor |
| وسطا التناسب means | نموذج مقياس رسم نسبي scale model |
| منصف المثلث midsegment of a triangle | المضلعات المتشابهة similar polygons |
| تناسب proportion | تحويل التشابه similarity transformation |
| النسبة ratio | |

### مراجعة المفردات

اختر الحرف المقابل للكلمة أو العبارة الأنسب لإكمال العبارات التالية.

| | |
|---|---|
| a. النسبة | h. نظرية تشابه SSS |
| b. التناسب | i. نظرية تشابه SAS |
| c. الوسطان | j. منصف |
| d. الطرفان | k. تغيير الأبعاد/التمدد |
| e. المشابه | l . التكبير |
| f. معامل المقياس | m. التصغير |
| g. مسلمة تشابه AA. | |

1. ___؟___ المثلث له طرفان في منتصف ضلعين من أضلاع المثلث.

2. ___؟___ هي مقارنة تتم بين كميتين من خلال القسمة.

3. إذا كان $\angle A \cong \angle X$ و $\angle C \cong \angle Z$، فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ حسب ___؟___.

4. ___؟___ هو مثال على تحويل تشابه.

5. إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، فإذًا $a$ و $d$ هما ___؟___.

6. نسبة أطوال ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هي ___؟___.

7. ___؟___ هي معادلة تفيد أن النسبتين متكافئتان.

8. تغيير أبعاد بمعامل مقياس $\frac{2}{5}$ سوف ينتج عنه ___؟___.

# مراجعة درس بدرس

## 7-1 النسب والتناسب

**حُـلّ كلاً من التناسبات التالية.**

9. $\frac{x+8}{6} = \frac{2x-3}{10}$

10. $\frac{3x+9}{x} = \frac{12}{5}$

11. $\frac{x}{12} = \frac{50}{6x}$

12. $\frac{7}{x} = \frac{14}{9}$

13. النسبة بين أطوال الأضلاع الثلاثة في مثلث هي 5:8:10. إذا كان المحيط 276 cm ، فجـد طول الضلع الأطول بالمثلث.

14. نجارة يجب قطع لوحة بطول 12 ft إلى قطعتين لهما نسبة أطوال 3 إلى 2. جـد أطوال القطعتين.

### مثال 1

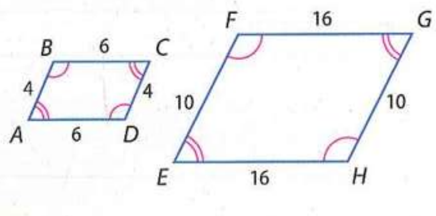
جـد حل $\frac{2x-3}{4} = \frac{x+9}{3}$.

| | |
|---|---|
| التناسب الأصلي | $\frac{2x-3}{4} = \frac{x+9}{3}$ |
| خاصية الضرب التبادلي | $3(2x-3) = 4(x+9)$ |
| بسّط. | $6x - 9 = 4x + 36$ |
| اطرح. | $2x - 9 = 36$ |
| اجمع 9 إلى كل طرف. | $2x = 45$ |
| اقسم كل طرف على 2. | $x = 22.5$ |

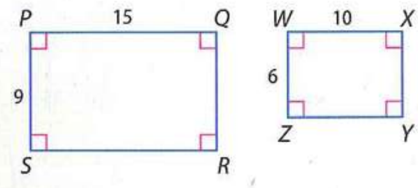
## 7-2 المضلعات المتشابهة

**حدد ما إذا كان كل زوجين من المثلثات متشابهين. فإن كانا متشابهين، فاكتب عبارة التشابه ومعامل المقياس. وإن لم يكونا متشابهين، فاشرح استنتاجك.**

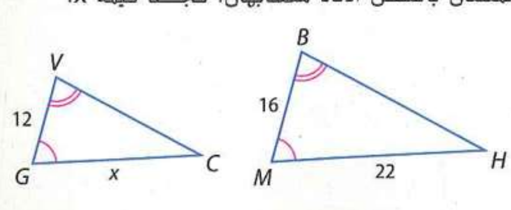
15.




16.



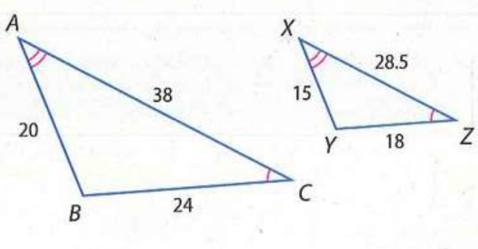

17. المثلثان بالشكل أدناه متشابهان. فجـد قيمة $x$.




18. **صور** إذا كانت أبعاد صورة ما 2 cm في 3 cm وأبعاد ملصق ما 8 cm في 12 cm، فهل الصورة والملصق متشابهان؟ اشرح.

### مثال 2

**حدد ما إذا كان المثلثان متشابهين. فإن كانا متشابهين، فاكتب عبارة التشابه ومعامل المقياس. وإن لم يكونا متشابهين، فاشرح استنتاجك.**




$\angle A \cong \angle X$ و $\angle C \cong \angle Z$. لذا حسب نظرية الزاوية الثالثة، فإن $\angle B \cong \angle Y$. وبالتالي فإن كل الزوايا المتناظرة متطابقة.

كما لابد أن تكون المضلعات المتشابهة لها أطوال أضلاع متناسبة. تحقق من نسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

$\frac{AB}{XY} = \frac{20}{15}$ أو $\frac{4}{3}$ ، $\frac{BC}{YZ} = \frac{24}{18}$ أو $\frac{4}{3}$ ، $\frac{AC}{XZ} = \frac{38}{28.5}$ أو $\frac{4}{3}$

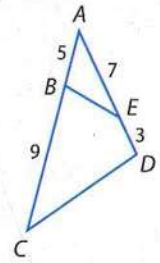
بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، إذًا $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$. ومن ثم فالمثلثان متشابهان بمعامل مقياس $\frac{4}{3}$.

# دليل الدراسة والمراجعة متابعة

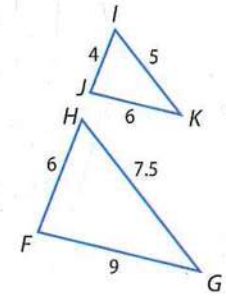
## 7-3 المثلثات المتشابهة

بيّن تشابه المثلثين من عدمه. فإن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. اشرح استنتاجك.

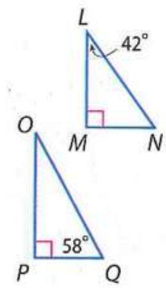
**19.**



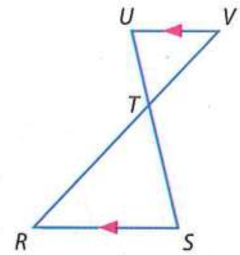

**20.**




**21.**



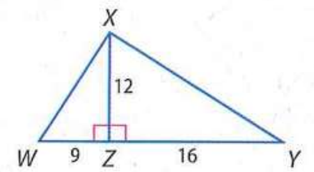

**22.**




**23. أشجار** لتقدير ارتفاع شجرة ما، وقف مازن في ظل الشجرة بحيث ينتهي ظله وظل الشجرة عند نفس النقطة. يبلغ طول مازن **6 ft** و **4 in** وطول ظله يبلغ **15 ft**. إذا كان يقف بعيدًا عن الشجرة **66 ft** فما ارتفاع الشجرة؟

### مثال 3

**بيّن تشابه المثلثين من عدمه. فإن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. اشرح استنتاجك.**




$\angle WZX \cong \angle XZY$ لأن كلتيهما زاوية قائمة. قارن الآن نسبة سيقان المثلثات القائمة.

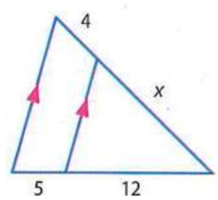
$$\frac{WZ}{XZ} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \qquad \frac{XZ}{YZ} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

بما أن الأزواج الأربعة من الأضلاع متناسبة بجانب تطابق الزاويتين المحصورتين بينهما، فإن $\triangle WZX \sim \triangle XZY$ حسب تشابه SAS.

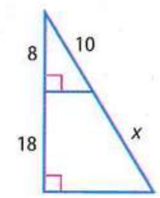
## 7-4 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

جــد $x$.

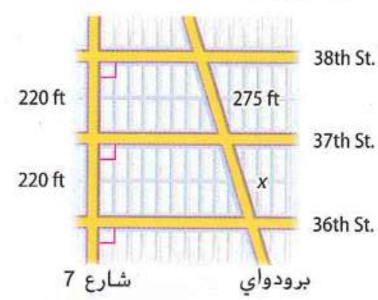
**24.**




**25.**

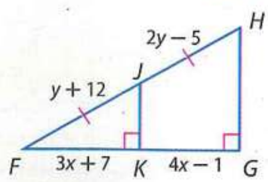



**26. شوارع** جـد المسافة بطول منطقة برودواي بين الشارع 37 والشارع 36.




### مثال 4

**الجبر** جــد $x$ و $y$.




$FK = KG$ تعريف التطابق

$3x + 7 = 4x - 1$ التعويض

$-x = -8$ اطرح.

$x = 8$ بسّط

$FJ = JH$ تعريف التطابق

$y + 12 = 2y - 5$ التعويض

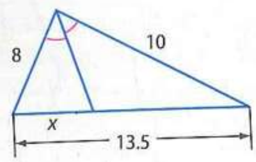
$-y = -17$ اطرح.

$y = 17$ بسّط

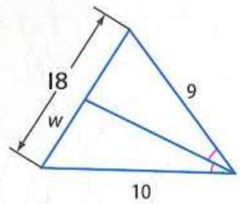
## 7-5 أجزاء المثلثات المتشابهة

جــد قيمة كل متغير.

**27.**



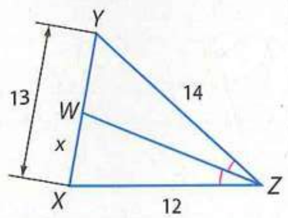

**28.**




**29. خرائط** يشير المقياس المحدد على خريطة أن 3 cm تمثل 50 km. تشكل مدن A و B و C مثلثًا. إذا كانت أطوال أضلاع هذا المثلث على الخريطة تبلغ 15 cm و 10 cm و 13 cm، فجــد محيط المثلث الحقيقي الذي تشكله تلك المدن الثلاث لأقرب كيلومتر.

### مثال 5

جـد $x$.




استخدم نظرية منصف زوايا المثلث لكتابة تناسب.

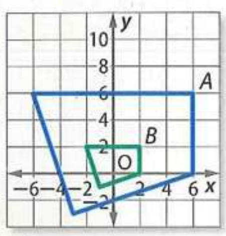
| | |
|---|---|
| نظرية منصف زوايا المثلث. | $\frac{WX}{YW} = \frac{XZ}{YZ}$ |
| التعويض | $\frac{x}{28 - x} = \frac{12}{14}$ |
| خاصية الضرب التبادلي | $(13 - x)(12) = x \cdot 14$ |
| بسّط. | $156 - 12x = 14x$ |
| اجمع. | $156 = 26x$ |
| بسّط. | $6 = x$ |

12.9

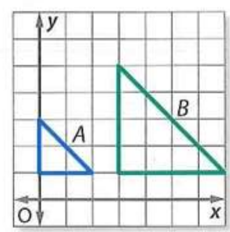
## 7-6 تحويلات التشابه

**حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد (التمدد) من *A* إلى *B* هو تكبير أم تصغير. ثم جــد معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدد).**

**30.**



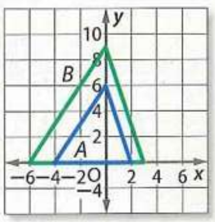

**31.**




**32. تصميم الرسومات** تريد وفاء استخدام آلة نسخ لتكبير تصميمها الخاص ببرنامج لوحة الشرف في مدرستها. أعدت الآلة على 250%. إذا كان الرسم الأصلي مقاسه 6 in في 9 in، فجــد أبعاد التكبير.

### مثال 6

**حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد (التمدد) من *A* إلى *B* هو تكبير أم تصغير. ثم جــد معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدد).**




*B* أكبر من *A*، لذا فتغيير الأبعاد (التمدد) هو تكبير المسافة بين الرأسين عند (0 ,4−) و (0 ,2) بالنسبة إلى *A* تبلغ 6 و المسافة بين الرأسين عند (0 ,6−) و (0 ,3) بالنسبة إلى *B* تبلغ 9. إذًا فمعامل المقياس هو $\frac{9}{6}$ أو $\frac{3}{2}$.

# دليل الدراسة والمراجعة متابعة

## 7-7 مقياس الرسم والنماذج المقياسية

**33. تخطيط المباني** في رسم بمقياس نسبي خاص بتخطيط أرضية مدرسة، كان كل 6 in تمثل 100 ft. إذا كانت المسافة من أحد أطراف المدخل إلى الآخر 175 ft. فجد الطول المناظر لها على الرسم.

**34. نماذج قطارات** يبلغ المقياس الشائع لنماذج القطارات 1:48. إذا كان طول القطار الحقيقي 72 m. فجد الطول المناظر له على النموذج بالسنتيمتر.

**35. خرائط** تم تحديد مقياس خريطة بحيث تكون 3 cm = 25 km. إذا كانت المسافة على الخريطة بين النقطة A و النقطة B، 11.5 cm. فما المسافة الحقيقية بين المدينتين؟

**مثال 7**

**في مقياس خريطة يكون 1 cm = 20 km. المسافة على الخريطة بين النقطة A و النقطة B، 8.75 cm . جد المسافة بين المدينتين.**

| | |
|---|---|
| اكتب تناسبًا. | $\frac{1}{20} = \frac{8.75}{x}$ |
| خاصية الضرب التبادلي | $x = 20(8.75)$ |
| بسّط. | $x = 175$ |

المسافة بين المدينتين 175 km.

# تدريب على الاختبار

**حُـلّ كلاً من التناسبات التالية.**

1. $\frac{3}{7} = \frac{12}{x}$

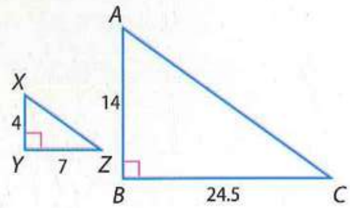
2. $\frac{2x}{5} = \frac{x+3}{3}$

3. $\frac{4x}{15} = \frac{60}{x}$

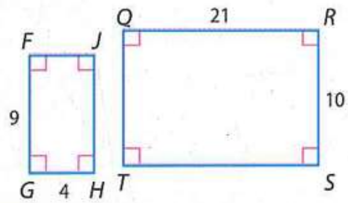
4. $\frac{5x-4}{4x+7} = \frac{13}{11}$

**حدد ما إذا كان كل زوجين من المثلثات متشابهين. فإن كانا متشابهين، فاكتب عبارة التشابه ومعامل المقياس. وإن لم يكونا متشابهين، فاشرح استنتاجك.**

5.



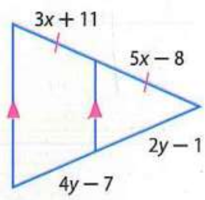

6.



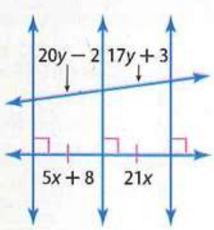

7. **عملات** **يسافر عدنان** إلى أوروبا هذا الصيف مع النادي الفرنسي. ويخطط لإحضار AED 1100 معه لإنفاقها هناك. إذا كانت AED 260.32 تساوي 63 يورو، فكم يورو سيحصل عليه عند تغيير النقود؟

8. **الجبر** جــد $x$ و $y$. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

8.




9.



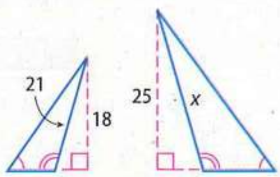

10. **الجبر** إن المثلث متساوي الأضلاع $\triangle MNP$ يبلغ محيطه منصف $\overline{QR}$. فما طول $QR$؟

11. **الجبر** المثلث $\triangle ABC$ قائم متساوي الساقين طول وتره $\overline{DE}$ منصف طوله $4x$ وليس موازيًا للوتر. فما محيط $\triangle ABC$؟

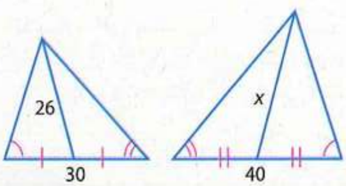
12. **إجابة مختصرة** يمتلك عيسى سيارة ديكست معدنية تمثل نموذجًا بمقياس نسبي لسيارة سباق حقيقية. إذا كان الطول الحقيقي للسيارة 10 ft و 6 in وطول النموذج 7 in، فما معامل مقياس النموذج إلى السيارة الحقيقية؟

**جــد $x$.**

13.

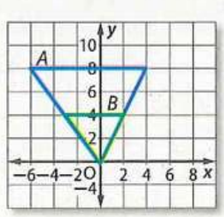



14.

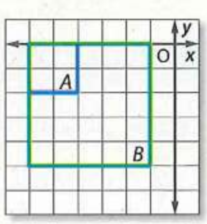



**حدد ما إذا كان تغيير الأبعاد (التمدد) من $A$ إلى $B$ هو تكبير أم تصغير. ثم جــد معامل مقياس تغيير الأبعاد (التمدد).**

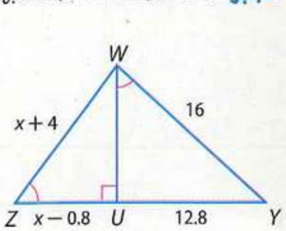
15.




16.




17. **الجبر** حدد المثلثات المتشابهة. جــد $WZ$ و $UZ$.



# التحضير للاختبارات المعيارية

## تحديد أمثلة خارجة عن التعريف

أحيانًا يُطلب منك بعناصر الاختيار من متعدد تحديد المثال الخارج عن التعريف بالإجابات المعطاة.
تتطلب هذه النوعية من المسائل طريقة مختلفة عند حلها.

### طرق تحديد الأمثلة الخارجة عن التعريف

**الخطوة 1**

اقرأ عبارة المسألة وافهمها.

- **أمثلة خارجة عن التعريف:** المثال الخارج عن التعريف هو اختيار إجابة لا تلبي شروط عبارة المسألة.
- **الكلمات الرئيسة:** ابحث عن كلمة *ليست* (عادةً تكون بالخط العريض أو كلها بالأحرف الكبيرة أو مائلة الأحرف) للإشارة إلى أنك تريد إيجاد مثال خارج عن التعريف.

**الخطوة 2**

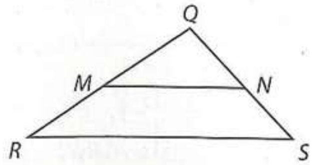
اتبع المفاهيم والخطوات أدناه لمساعدتك على تحديد الأمثلة الخارجة عن التعريف.
حدد أي خيارات إجابة يتضح عدم صحتها واستبعدها.

- استبعد أي خيارات إجابة لا تكون سليمة الصياغة.
- استبعد أي خيارات إجابة لا تتضمن الوحدات الصحيحة.



### مثال على الاختبار المعياري

**اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.**




في المثلث المتجاور، أنت تعرف أن $\angle MQN \cong \angle RQS$.
أيًا من التالي ليس كافيًا لإثبات أن $\triangle QMN \sim \triangle QRS$؟

**A** $\angle QMN \cong \angle QRS$

**B** $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

**C** $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

**D** $\frac{QM}{QR} = \frac{QN}{QS}$

تشير كلمة *ليست* المائلة إلى ضرورة إيجاد مثال خارج عن التعريف. اختبر كل خيار إجابة باستخدام مبادئ تشابه المثلثات لترى أي مبدأ لا يمكنه إثبات $\triangle QRS \cong \triangle QMN$.

**الخيار A:** $\angle QRS \cong \angle QMN$

إذا كان $\angle QRS \cong \angle QMN$، فإن $\triangle QRS \sim \triangle QMN$ حسب تشابه AA.

**الخيار B:** $\overline{RS} \parallel \overline{MN}$

إذا كان $\overline{RS} \parallel \overline{MN}$ فإن $\angle QRS \cong \angle QMN$، لأنها زوايا متناظرة لمستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع $\overline{QR}$ ولذلك، $\triangle QRS \sim \triangle QMN$ حسب تشابه AA.

**الخيار C:** $\overline{NS} \cong \overline{QN}$

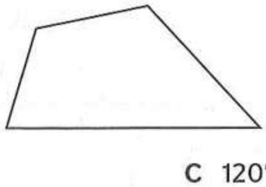
إذا كان $\overline{NS} \cong \overline{QN}$، لا يمكننا استنتاج أن $\triangle QRS \sim \triangle QMN$ لأننا لا نعرف شيئًا عن $\overline{QM}$ و $\overline{MR}$. لذا، فإن اختيار الإجابة C مثالاً خارجًا عن التعريف.

الإجابة الصحيحة هي C. يجب التحقق أيضًا من الاختيار D للتأكد من أنه مثال صالح إذا توفر لديك الوقت.

## تمارين

**اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.**

**1.** نسبة قياس زوايا الشكل الرباعي أدناه هي 3:4:5:6. أي مما يلي ليس قياسًا لزاوية في الشكل؟



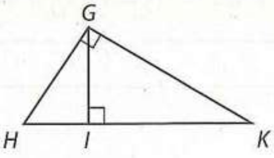
**A** $60°$ **C** $120°$
**B** $80°$ **D** $140°$

**2.** ما نوع الشكل الذي يمكن أن يقدم مثالاً عكسيًا على الفرضية أدناه؟

| |
|---|
| إذا كانت جميع زوايا الشكل الرباعي قائمة، فعندئذٍ يكون الشكل الرباعي مربعًا. |

**F** متوازي الأضلاع
**G** مستطيل
**H** معين
**J** شبه منحرف

**3.** فكّر في الشكل أدناه. أيًا من التالي ليس كافيًا لإثبات أن $\triangle GIK \sim \triangle HIG$؟




**A** $\angle GKI \cong \angle HGI$
**B** $\frac{HI}{GI} = \frac{GI}{IK}$
**C** $\frac{GH}{GI} = \frac{GK}{IK}$
**D** $\angle IGK \cong \angle IHG$

**4.** أي مثلثين ليسا متشابهين بالضرورة؟

**F** مثلثان قائمان بكل منهما زاوية واحدة قياسها $30°$
**G** مثلثان قائمان بكل منهما زاوية واحدة قياسها $45°$
**H** مثلثان متساويا الساقين
**J** مثلثان متساويا الأضلاع

الوحدة 7

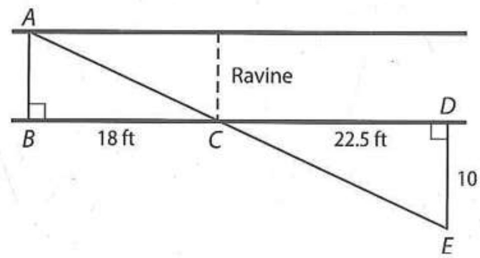
# تدريب على الاختبار المعياري

## تراكمي، الوحدات من 1 إلى 7

### اختيار من متعدد

**اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.**

**1.** يريد عيسى قياس عرض وادٍ. يحدد المسافات كما هو مبين بالرسم التخطيطي.




باستخدام هذه المعلومات، ما هو العرض ***التقريبي*** للوادي؟

**A** 5 m

**B** 6 m

**C** 7 m

**D** 8 m

**2.** يخطط محمود وعائلته لرحلة لمدينة كانكون بالمكسيك. يريد محمود تحويل AED 734.62 إلى بيزو مكسيكي للنفقات. إذا كان 278 بيزو مكسيكي يساوي AED 91.83، فكم بيزو سيحصل عليهم كمال مقابل AED 734.62؟

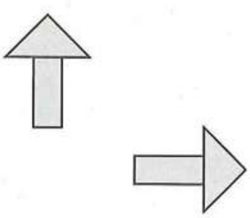
**F** 2,178

**G** 2,224

**H** 2,396

**J** 2,504

**3.** أي من المصطلحات التالية يمثل الوصف الأمثل للتحويل أدناه؟



**A** تغيير أبعاد

**B** انعكاس

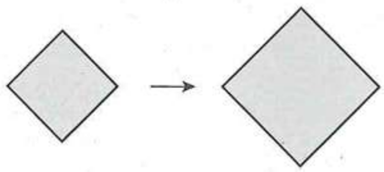
**C** دوران

**D** إزاحة

**نصيحة عند حل الاختبار**

**السؤال 2** حدد التناسب الخاص بعدد البيزو وأوجد حله. استخدم نسبة البيزو : درهم.

**4.** ارجع إلى الأشكال أدناه. أي من المصطلحات التالية يمثل الوصف الأمثل للتحويل؟



**F** تطابق

**G** تكبير

**H** تصغير

**J** مقياس

**5.** نسبة المقيمين في كارولينا الشمالية إلى الأمريكيين حوالي 295 إلى 10,000. إذا كان هناك ما يقرب من 300,000,000 أمريكي، فكم يبلغ عدد سكان كارولينا الشمالية؟

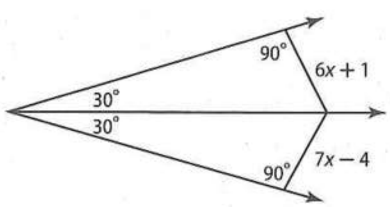
**A** 7,950,000

**B** 8,400,000

**C** 8,850,000

**D** 9,125,000

**6.** أوجد حل $x$.




**F** 3

**G** 4

**H** 5

**J** 6

**7.** يبلغ معامل المقياس لشبهي منحرف متشابهين 3:2. محيط شبه المنحرف الأكبر 21 m. فما محيط شبه المنحرف الأصغر؟

**A** 14 m

**B** 17.5 m

**C** 28 m

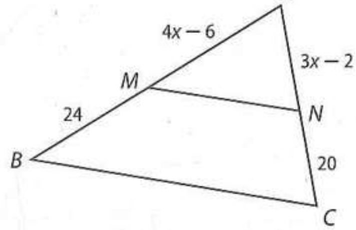
**D** 31.5 m

## الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

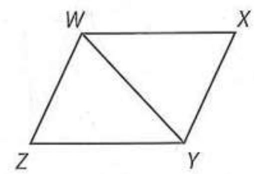
**اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.**

**8.** **إجابة شبكية** قامت موزة بدراسة استطلاعية على 50 طالبًا من مدرستها ووجدت أن 35 منهم لديهم واجبات منزلية لأربع ليالٍ بالأسبوع على الأقل. إذا كان مجموع الطلاب بالمدرسة ككلٍ 290 طالبًا، فكم منهم تتوقع أن يكون لديه واجب منزلي لأربعة ليالي بالأسبوع على الأقل؟

**9.** **إجابة شبكية** في المثلث أدناه، $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ . أوجد حل $x$.



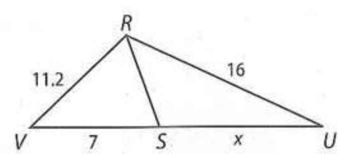

**10.** الشكل الرباعي $WXYZ$ عبارة عن معيّن. إذا كان $m\angle XYZ = 110°$، فأوجد $m\angle ZWY$.




**11.** ما المعاكس الإيجابي للعبارة أدناه؟

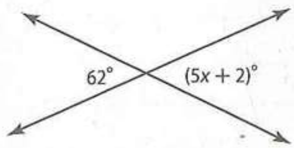
| |
|---|
| إذا كان ماجد قد ولد في لويفيل، فإنه ولد في ولاية كنتاكي. |

**12.** **إجابة شبكية** في المثلث أدناه، $\overline{RS}$ ينصف $\angle VRU$. أوجد حل $x$.




**13.** **إجابة شبكية** يبلغ مقياس الخريطة $1\text{ cm} = 2.5\text{ km}$. كم تبلغ المسافة بين مدينتين تبعدان $3.3\text{ cm}$ على الخريطة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

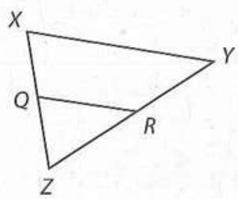
**14.** ما قيمة $x$ في الشكل؟




## الإجابة الموسعة

**اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.**

**15.** راجع المثلث $XYZ$ للإجابة على كل سؤال.




**a.** افترض أن $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$. ما المعطيات التي تعرفها عن العلاقة بين القطع المستقيمة $XQ$ و $QZ$ و $YR$ و $RZ$؟

**b.** إذا كان $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$ و $XQ = 15$ و $QZ = 12$ و $YR = 20$. فما طول $\overline{RZ}$ ؟

**c.** افترض أن $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$ و $\overline{XQ} \cong \overline{QZ}$ و $QR = 9.5$ وحدات. فما طول $\overline{XY}$؟

# كتيب الطالب

## الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

## الرموز

### الجبر

| | |
|---|---|
| $\neq$ | لا يساوي |
| $\approx$ | تقريبًا يساوي |
| $\sim$ | يشابه |
| $>, \geq$ | أكبر من، أكبر من أو يساوي |
| $<, \leq$ | أصغر من، أصغر من أو يساوي |
| $-a$ | معكوس $a$ أو المعكوس الجمعي لـ $a$ |
| $\lvert a \rvert$ | القيمة المطلقة لـ $a$ |
| $\sqrt{a}$ | الجذر التربيعي الأساسي لـ $a$ |
| $a : b$ | نسبة $a$ إلى $b$ |
| $(x, y)$ | زوج مرتّب |
| $(x, y, z)$ | مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتّب) |
| $i$ | الوحدة التخيلية |
| $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ | الجذر النوني لـ $b$ |
| $\mathbb{Q}$ | الأعداد النسبية |
| $\mathbb{I}$ | الأعداد غير النسبية |
| $\mathbb{Z}$ | الأعداد الصحيحة |
| $\mathbb{W}$ | الأعداد الكاملة |
| $\mathbb{N}$ | الأعداد الطبيعية |
| $\infty$ | ما لا نهاية |
| $-\infty$ | سالب ما لا نهاية |
| $[\ ]$ | تتضمن الأطراف |
| $(\ )$ | لا تتضمن الأطراف |
| $\log_b x$ | لوغاريتم $x$ للأساس $b$ |
| $\log x$ | اللوغاريتم العادي لـ $x$ |
| $\ln x$ | اللوغاريتم الطبيعي لـ $x$ |
| $\omega$ | أوميجا، السرعة الزاويّة |
| $\alpha$ | ألفا، قياس الزاوية |
| $\beta$ | بيتا، قياس الزاوية |
| $\gamma$ | جاما، قياس الزاوية |
| $\theta$ | ثيتا، قياس الزاوية |
| $\lambda$ | لامدا، طول الموجة |
| $\phi$ | فاي، قياس الزاوية |
| $\mathbf{a}$ | متجه a |
| $\lvert\mathbf{a}\rvert$ | طول المتجه a |

### المجموعات والمنطق

| | |
|---|---|
| $\in$ | ينتمي إلى |
| $\subset$ | مجموعة جزئية من |
| $\cap$ | تقاطع |
| $\cup$ | اتحاد |
| $\varnothing$ | المجموعة الخالية |
| $\sim p$ | نفي $p$، ليس $p$ |
| $p \wedge q$ | ربط $p$ و $q$ |
| $p \vee q$ | فصل $p$ أو $q$ |
| $p \rightarrow q$ | العبارة الشرطية، إذا كان $p$ فإن $q$ |
| $p \leftrightarrow q$ | العبارة ثنائية الشرط، $p$ إذا وفقط إذا $q$ |

### الهندسة

| | |
|---|---|
| $\angle$ | زاوية |
| $\triangle$ | مثلث |
| $^\circ$ | درجة |
| $\pi$ | باي pi |
| $\measuredangle$ | درجات |
| $m\angle A$ | قياس $\angle A$ |
| $\overleftrightarrow{AB}$ | مستقيم يحتوي على النقطتين $A$ و $B$ |
| $\overline{AB}$ | مستقيم نقطتاه الطرفيتان $A$ و $B$ |
| $\overrightarrow{AB}$ | الشعاع من النقطة $A$ الى النقطة $B$ |
| $AB$ | قياس $\overline{AB}$، المسافة بين $A$ و $B$ |
| $\parallel$ | يوازي |
| $\nparallel$ | لا يوازي |
| $\perp$ | متعامد على |
| $\triangle$ | مثلث |
| $\square$ | متوازي أضلاع |
| $n$-gon | مضلع عدد أضلاعه $n$ |
| $\vec{a}$ | متجه a |
| $\overrightarrow{AB}$ | المتجه من $A$ إلى $B$ |
| $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ | مقدار متجه من $A$ إلى $B$ |
| $A'$ | صورة الصورة الأصلية $A$ |
| $\rightarrow$ | موضوع على |
| $\odot A$ | دائرة مركزها $A$ |
| $\widehat{AB}$ | قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان $A$ و $B$ |
| $\widehat{ABC}$ | قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان $A$ و $C$ |
| $m\widehat{AB}$ | قياس درجة القوس $AB$ |

### حساب المثلثات

| | |
|---|---|
| $\sin x$ | جيب الزاوية $x$ |
| $\cos x$ | جيب تمام الزاوية $x$ |
| $\tan x$ | ظل الزاوية $x$ |
| $\sin^{-1} x$ | Arcsin $x$ |
| $\cos^{-1} x$ | Arccos $x$ |
| $\tan^{-1} x$ | Arctan $x$ |

## الرموز

### الدوال

| | |
|---|---|
| $f(x)$ | $f$ لـ $x$، قيمة $f$ لـ $x$ |
| $f(x) = \{$ | دالة متعددة التعريف |
| $f(x) = \lvert x \rvert$ | دالة القيمة المطلقة |
| $f(x) = [\![x]\!]$ | دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من $x$ |
| $f(x, y)$ | $f$ لـ $x$ و $y$، دالة متغيراها $x$ و$y$ |
| $[f \circ g](x)$ | $f$ لـ $g$ لـ $x$، تركيب الدالتين $f$ و$g$ |
| $f^{-1}(x)$ | معكوس $f(x)$ |

### النهايات والتفاضل والتكامل

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to c}$ | النهاية عندما تقترب $x$ من $c$ |
| $m_{\sec}$ | ميل القاطع |
| $f'(x)$ | مشتقة الدالة $f(x)$ |
| $\Delta$ | دلتا، أو مقدار التغيير |
| $\int$ | تكامل غير محدود |
| $\int_a^b$ | تكامل محدود |
| $F(x)$ | مشتقة عكسية للدالة $f(x)$ |

### الاحصاء والاحتمالات

| | |
|---|---|
| $P(a)$ | احتمال $a$ |
| $P(n, r)$ أو $_nP_r$ | تباديل $n$ من العناصر مأخوذ منها $r$ عنصر في كل مرة |
| $C(n, r)$ أو $_nC_r$ | توافيق $n$ من العناصر مأخوذ منها $r$ عنصر في كل مرة |
| $P(A)$ | احتمال $A$ |
| $P(A\|B)$ | احتمال $A$ إذا علمت أن $B$ حدث بالفعل |
| $n!$ | مضروب العدد $n$ (حيث $n$ عدد طبيعي) |
| $\sum$ | سيجما، رمز المجموع |
| $\mu$ | متوسط مجتمع إحصائي |
| $\sigma$ | الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي |
| $\sigma^2$ | تباين المجتمع الإحصائي |
| $s$ | الانحراف المعياري لعينة |
| $s^2$ | تباين العينة |
| $\sum\limits_{n=1}^{k}$ | مجموع من $n = 1$ إلى $k$ |
| $\overline{x}$ | متوسط $x$ ، متوسط العينة |
| $H_0$ | فرضية العدم |
| $H_a$ | الفرضية البديلة |

## القياسات

| متري | عُرفي |
|---|---|
| **الطول** | |
| 1 كيلومتر (km) = 1000 متر (m)<br>1 متر = 100 سنتيمتر (cm)<br>1 سنتيمتر = 10 ملليمتر (mm) | 1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)<br>1 ميل = 5280 قدمًا (ft)<br>1 ياردة = 3 أقدام<br>1 قدم = 12 بوصة (in)<br>1 ياردة = 36 بوصة |
| **الحجم والسعة** | |
| 1 لتر (L) = 1000 ملليلتر (mL)<br>1 كيلولتر (kL) = 1000 لتر | 1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)<br>1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)<br>1 كوارت = 2 باينت (pt)<br>1 باينت = 2 كوب (c)<br>1 كوب = 8 أونصات سائلة |
| **الوزن والكتلة** | |
| 1 كيلوجرام (kg) = 1000 جرام (g)<br>1 جرام = 1000 ملليجرام (mg)<br>1 طن متري (t) = 1000 كيلوجرام | 1 طن (T) = 2000 رطل (lb)<br>1 رطل = 16 أونصة (oz) |

## العمليات والعلاقات الحسابية

| | |
|---|---|
| **المحايد** | لأي عدد $a$، يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. |
| **التعويض (=)** | إذا كان $a = b$، يمكن التعويض عن $a$ باستخدام $b$. |
| **الانعكاس (=)** | $a = a$ |
| **التماثل (=)** | إذا كان $a = b$، فإن $b = a$. |
| **التعدي (=)** | إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$. |
| **التبديل** | لأي عددين $a$ و $b$، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$. |
| **التجميع** | لأي أعداد $a$ و $b$ و $c$، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. |
| **التوزيع** | لأي أعداد $a$ و $b$ و $c$، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$. |
| **المعكوس الجمعي** | لأي عدد $a$، يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$. |
| **المعكوس الضربي** | لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$، يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. |
| **الضرب (0)** | لأي عدد $a$، يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. |
| **الجمع (=)** | لأي أعداد $a$ و $b$ و $c$، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$. |
| **الطرح (=)** | لأي أعداد $a$ و $b$ و $c$، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$. |
| **الضرب والقسمة (=)** | لأي أعداد $a$ و $b$ و $c$، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. |
| **الجمع (>)*** | لأي أعداد $a$ و $b$ و $c$، إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$. |
| **الطرح (>)*** | لأي أعداد $a$ و $b$ و $c$، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$. |
| **الضرب والقسمة (>)*** | لأي أعداد $a$ و $b$ و $c$.<br>1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.<br>2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$. |
| **ناتج الضرب الصفري** | لأي عددين حقيقيين $a$ و $b$، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو $a$ و $b$ كلاهما 0. |

* *تنطبق هذه الخواص كذلك على $<$ و $\geq$ و $\leq$.*

## الصيغ والمفاهيم الجبرية

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **المصفوفات** | | |
| **الجمع** | $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$ | **الضرب في كمية عددية** | $k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$ |
| **الطرح** | $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$ | **الضرب** | $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$ |
| | **كثيرات الحدود** | | |
| **القانون العام** | $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$ | **مربع فرق** | $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$<br>$= a^2 - 2ab + b^2$ |
| **مربع مجموع** | $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$<br>$= a^2 + 2ab + b^2$ | **ناتج ضرب مجموع وفرق** | $(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$<br>$= a^2 - b^2$ |
| | **اللوغاريتمات** | | |
| **خاصية الضرب** | $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$ | **خاصية الأس الثابت** | $\log_b m^p = p \log_b m$ |
| **خاصية القسمة** | $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$ | **تغيير الأساس** | $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$ |

## الصيغ والمفاهيم الجبرية

| | | | |
|---|---|---|---|
| **الدوال الأسيّة واللوغاريتمية** | | | |
| **المرابحة المركبة** | $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ | **النمو أو الاضمحلال الأسيّ** | $N = N_0(1 + r)^t$ |
| **النمو المركب المستمر** | $A = Pe^{rt}$ | **النمو أو الاضمحلال الأسيّ المستمر** | $N = N_0e^{kt}$ |
| **خاصية الضرب** | $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ | **خاصية القوة** | $\log_b x^p = p \log_b x$ |
| **خاصية القسمة** | $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$ | **خاصية تغيير الاساس** | $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ |
| **المتتاليات والمتسلسلات** | | | |
| **الحد النوني لمتتالية حسابية** | $a_n = a_1 + (n - 1)d$ | **الحد النوني لمتتالية هندسية** | $a_n = a_1r^{n-1}$ |
| **مجموع متسلسلة حسابية** | $S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$ | **مجموع متسلسلة هندسية** | $S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}, r \neq 1$ |
| **مجموع متسلسلة هندسية لانهائية** | $S = \frac{a_1}{1 - r}, \lvert r \rvert < 1$ | **صيغة أويلر** | $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ |
| **متسلسلة القوة** | $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ | **المتسلسلة الأسيّة** | $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ |
| **نظرية ذات الحدين** | $(a + b)^n = {}_nC_0\, a^nb^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0b^n$ | | |
| **متسلسلة القوة للجيب وجيب وجيب التمام** | $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ <br> $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ | | |
| **المتجهات** | | | |
| **الجمع في المستوى** | $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ | **الجمع في الفضاء** | $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$ |
| **الطرح في المستوى** | $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$ | **الطرح في الفضاء** | $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ <br> $= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$ |
| **الضرب القياسي في المستوى** | $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$ | **الضرب القياسي في الفضاء** | $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$ |
| **الضرب النقطي في المستوى** | $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ | **الضرب النقطي في الفضاء** | $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ |
| **الزاوية بين متجهين** | $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$ | **مسقط u على v** | $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$ |
| **طول المتجه** | $\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ | **الضرب القياسي لثلاثة متجهات** | $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ |
| **معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي** | | | |
| **صيغة الميل والمقطع** | $y = mx + b$ | | |
| **صيغة النقطة والميل** | $y - y_1 = m(x - x_1)$ | | |

## الصيغ والمفاهيم الجبرية

| القطوع المخروطيّة | | | |
|---|---|---|---|
| قطع مكافئ | $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ أو $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ | دائرة | $x^2+y^2=r^2$ أو $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ |
| قطع ناقص | $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ | قطع زائد | $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ |
| الدوران المحوري للقطوع المخروطيّة | $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$ و $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ | | |

| المعادلات الوسيطيّة | | | |
|---|---|---|---|
| الموقع العمودي | $y = tv_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$ | المسافة الأفقية | $x = tv_0\cos\theta$ |

| الأعداد المُركبة | | | |
|---|---|---|---|
| صيغة الضرب | $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ | صيغة القسمة | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ |
| صيغة الجذور المختلفة | $r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$ | نظرية ديموافر | $z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ |

## الصيغ والمفاهيم الهندسية

| الهندسة الإحداثية | | | |
|---|---|---|---|
| الميل | $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$ | المسافة على خط الأعداد | $d = \|a-b\|$ |
| المسافة بين نقطتين في المستوى | $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ | طول القوس | $\ell = \frac{x}{360}\cdot 2\pi r$ |
| نقطة المنتصف في المستوى الاحداثي | $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ | نقطة المنتصف على خط الأعداد | $M = \frac{a+b}{2}$ |
| نقطة المنتصف في الفضاء | $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ | نظرية فيثاغورس | $a^2+b^2=c^2$ |

| المحيط | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| مربع | $P = 4s$ | مستطيل | $P = 2\ell + 2w$ | دائرة | $C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$ |

| مساحة السطح الجانبية | | | |
|---|---|---|---|
| منشور | $L = Ph$ | هرم | $L = \frac{1}{2}P\ell$ |
| إسطوانة | $L = 2\pi rh$ | مخروط | $L = \pi r\ell$ |

| مساحة السطح الكلية | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| منشور | $S = Ph + 2B$ | مخروط | $S = \pi r\ell + \pi r^2$ | إسطوانة | $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ |
| هرم | $S = \frac{1}{2}P\ell + B$ | كرة | $S = 4\pi r^2$ | مكعب | $S = 6s^2$ |

| الحجم | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| منشور | $V = Bh$ | مخروط | $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2$ | إسطوانة | $V = \pi r^2 h$ |
| هرم | $V = \frac{1}{3}Bh$ | كرة | $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ | مكعب | $V = s^3$ |
| متوازي مستطيلات | $V = \ell wh$ | | | | |

# الدوال والمتطابقات المثلثية

## الدوال المثلثية

| | | | |
|---|---|---|---|
| النسب المثلثية | $\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$<br>$\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta}$ | $\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$<br>$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta}$ | $\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$<br>$\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ |
| قانون جيوب التمام | $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ | $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ | $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ |
| قانون الجيوب | $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ | صيغة هيرون | $\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ |
| السرعة الخطية | $v = \frac{s}{t}$ | السرعة الزاويّة | $\omega = \frac{\theta}{t}$ |

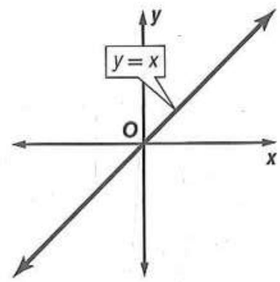
## المتطابقات المثلثية

| | | | |
|---|---|---|---|
| متطابقات المقلوب | $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$<br>$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ | $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$<br>$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ | $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$<br>$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ |
| متطابقات فيثاغورس | $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ | $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ | $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ |
| متطابقات المتممات | $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$<br>$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ | $\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$<br>$\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ | $\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$<br>$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ |
| متطابقات الفردي والزوجي | $\sin(-\theta) = -\sin\theta$<br>$\csc(-\theta) = -\csc\theta$ | $\cos(-\theta) = \cos\theta$<br>$\sec(-\theta) = \sec\theta$ | $\tan(-\theta) = -\tan\theta$<br>$\cot(-\theta) = -\cot\theta$ |
| متطابقات المجموع والفرق | $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$<br>$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$<br>$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ | $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$<br>$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$<br>$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ | |
| متطابقات ضعف الزاوية | $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$<br>$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ | $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$<br>$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$ | $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ |
| متطابقات تخفيض الأس | $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ | $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ | $\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$ |
| متطابقات نصف الزاوية | $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$<br>$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ | $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$<br>$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ | $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ |
| متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق | $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$<br>$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$ | $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$<br>$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$ | |
| متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب | $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$<br>$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ | $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$<br>$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ | |

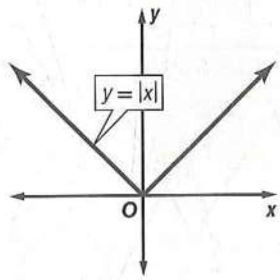
## الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

### الدوال الأصلية

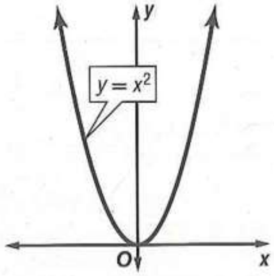
**الدوال الخطية**



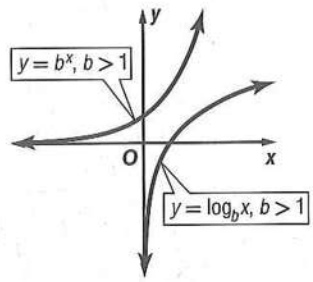

**دوال القيمة المطلقة**



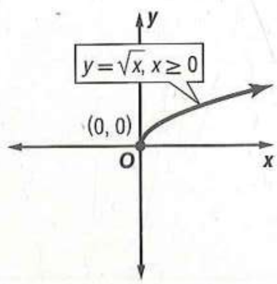

**الدوال التربيعية**



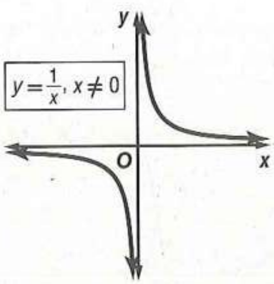

**الدوال الأسيّة واللوغاريتمية**




**دوال الجذر التربيعي**




**الدوال العكسية والنسبية**




### العمليات الحسابية على الدوال

| | | | |
|---|---|---|---|
| **الجمع** | $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ | **الضرب** | $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ |
| **الطرح** | $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ | **القسمة** | $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$ |

## النهايات والتفاضل والتكامل

### النهايات

| | | | |
|---|---|---|---|
| **نهاية مجموع دالتين** | $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$ | **نهاية طرح دالتين** | $\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$ |
| **نهاية قسمة دالتين** | $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$ | **نهاية دالة مرفوعة لأس** | $\lim \quad x \to c\,[f(x)^n] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$ |
| **السرعة** | اللحظيّة $v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t}{h}$ المتوسطة $v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ | **نهاية الجذر النوني لدالة** | $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ و $n$ عدد زوجي |

### التفاضل

| | | | |
|---|---|---|---|
| **قاعدة القوة** | إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$ | **المجموع أو الفرق** | إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$ |
| **قاعدة الضرب** | $\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ | **قاعدة القسمة** | $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ |

### التكامل

| | | | |
|---|---|---|---|
| **التكامل غير المحدود** | $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ | **النظرية الاساسيّة في التفاضل والتكامل** | $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ |

## الصيغ والمفاهيم الاحصائية

| | | | |
|---|---|---|---|
| قيمة z لمتوسط العينة | $z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_{\overline{x}}}$ | قيمة z | $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ |
| الحد الأقصى لقيمة التوقع | $E = z \cdot \sigma_{\overline{x}}$ or $z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | خاصية ذات الحدين | $P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x q^{n-x}$ |
| فترة الثقة في توزيع t | $CI = \overline{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ | فترة الثقة، في توزيع طبيعي | $CI = \overline{x} \pm E$ or $\overline{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
| معامل الارتباط لاختبار t | $t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ ، درجات الحرية: $n - 2$ | معامل الارتباط | $r = \frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \overline{y}}{s_y}\right)$ |

# نسخة الطلاب

شكر وتقدير

**vii** Glow Images; **viii** ©Purestock/SuperStock; **ix** Jean-Pierre Pieuchot/Photodisc/Getty Images; **x** Cusp/SuperStock; **xi** Purestock/SuperStock; **xii** James Randklev/Photographer's Choice RF/Getty Images; **xiii** Hero/Corbis/Glow Images; **xiv** Deborah Benbrook/Alamy; **xv** age fotostock/SuperStock; **xvi** Image Source/SuperStock; **272** (b)Aha-Soft/Shutterstock.com; **274** Duda Vasilii/Shutterstock.com; **280** Mitrofanov Alexander/Shutterstock RF; **294** ©Momentum Creative Group/Alamy; **309** ptnphoto@123RF.com; **311** 3alexd/iStock/Getty Images; **319** John Carleton/Flickr/Getty Images; **320** Naufal MQ/Getty Images RF; **324** Aha-Soft/Shutterstock.com; **330** James Randklev/Photographer's Choice RF/Getty Images; **333** Navapon Plodprong/Shutterstock.com; **335** epa european pressphoto agency b.v./Alamy Images; **339** (l) Gary Roebuck/Alamy Images, (c) Emilio Ereza/Alamy, (r)©Mario7/Shutterstock.com; **341** Photov.com/AGE Fotostock; **342** Gary C. Tognoni/Shutterstock.com; **343** imagebroker/Alamy Images; **353** FORGET Patrick/SAGAPHOTO.COM/Alamy Images; **359** Robert Nicholas/age fotostock; **368** Javier Larrea/age fotostock; **377** GaudiLab/Shutterstock.com; **380** Ruddy Gold/age fotostock; **384** Robert Adrian Hillman/Alamy; **387** Mike Grandmaison/age fotostock; **390** Ilya Genki/Alamy Images; **393** Glow Images; **395** Ron Gravelle/WeatherVideoHD.TV; **402** G-stockstudio/Shutterstock.com; **403** Africa Studio/Shutterstock.com; **404** (tl) Wissanu sirapat/Shutterstock.com, (tr)©Imageplus/Corbis, (b)George Doyle/Stockbyte/Getty Images; **405** (tl)Chamnong Inthasaro/Shutterstock.com, (tc)Stephan Zirwes/Getty Images, (tr)Bork/Shutterstock.com, (bl)Kelly Redinger/Design Pics, (bc) Photodisc/Alamy, (br)Inked Pixels/Shutterstock.com; **420** Hero/Corbis/Glow Images; **423** Clearviewstock/Alamy; **431** Zurijeta/Shutterstock.com; **432** (t)Image Source, (l) Image Source, (c)Image Source; **438** Dboystudio/Shutterstock.com; **452** Gregory Warran/Flickr/Getty Images; **464** Jasminko Ibrakovic/Shutterstock.com; **470** Paul Reeves Photography/Shutterstock.com; **474** CORBIS/SuperStock; **477** (l) Tetra Images/Alamy Stock Photo, (r) C Squared Studios/Getty Images, (inset)Tetra Images/Alamy Stock Photo; **480** Alistair Scott/Alamy; **481** Stockdisc/Getty Images, amolson7/Shutterstock.com;

# ملاحظات الطالب

# ملاحظات الطالب

# ملاحظات الطالب

# ملاحظات الطالب

# ملاحظات الطالب

# ملاحظات الطالب

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم
اقتراح - استفسار - شكوى

80051115 04-2176855 ccc.moe@moe.gov.ae www.moe.gov.ae

رؤية
VISION
2021
الإمارات العربية المتحدة
UNITED ARAB EMIRATES

المدرسة الإماراتية

mheducation.com/prek-12

ISBN-13: 978-1-5268-9983-5
ISBN-10: 1-5268-9983-3
9 781526 899835

Mc Graw Hill