الدالة الأصلية والتكامل غير المحدود

$F'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^3 + \boxed{5} \to$ ثابت التكامل

يعرف التكامل على أنه العملية العكسية للتفاضل.

عند دراسة التفاضل تمكنا من إيجاد المشتقة $F'(x)$ إذا علمنا الدالة $F(x)$

ولكن ما العلاقة بين المشتقة $F'(x)$ والمشتقة العكسية $F(x)$

مثال : المشتقة لكل من الدوال $H(x)=x^3+1/2$, $G(x)=x^3-2$, $F(x)=x^3+4$ هي

$H'(x)=h(x)=3x^2$, $G'(x)=g(x)=3x^2$, $F'(x)=f(x)=3x^2$

لاحظ أن لكل دالة مشتقة واحدة فقط ، بينما المشتقة لها عدد لا نهائي من الدوال الأصلية تختلف عن بعضها في الثابت

وعموما إذا كانت $F(x)$ أي دالة أصلية للدالة $f(x)$ فإن $\frac{d}{dx}[F(x)+C] = F'(x)+0 = f(x)$

تدريب ① أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 2x+1$, b) $f(x) = -3x^{-4}$

$F(x) = x^2 + x + 3$ $F(x) = x^{-3} + 2$

② أوجد دالّتين أصليتين مختلفتين للدالة: $f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 + 1$, $G(x) = x^3 + 2$

نظرية (1)

إذا كانت $F(x)$ و $G(x)$ دالتان أصليتان للدالة $f(x)$ على الفترة I فإن:

$G(x) = F(x) + C$ حيث C ثابت .

أي أن : ≺ $G(x) - F(x) = C$ (الفرق بين أي دالتين أصليتين للدالة f يساوي ثابت)

≺ $F'(x) = G'(x) = f(x)$

* بفرض أن $F(x) = ax^2 + bx - 3$ ، $G(x) = (3x+1)^2$ دالتان أصليتان لدالة $f(x)$ أوجد قيمة كل من a , b

$G(x) - F(x) = c \Rightarrow (3x+1)^2 - (ax^2+bx-3) = c$

$9x^2 + 6x + 1 - ax^2 - bx + 3 = c$

$a = 9$
$b = 6$

ملاحظة هامة : $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$, $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

تعريف : التكامل غير المحدود

إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة I فإن التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$

يُعطى بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ، الرمز $\int$ علامة التكامل ، و C ثابت التكامل .

وحيث أن $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ فإن $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

وكذلك بما أن $\frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$ فيكون $\int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2} + c$

اسم الطالب:.. الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

نظرية (2) ـ (قاعدة القوة)

لأي قوة نسبية $n \neq -1$ يكون $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

وإذا كانت $n < -1$ فالفترة I المعرفة عليها الدالة يمكن أن تكون فترة لا تتضمن $x = 0$

تدريب أوجــد التكامل في كل مما يأتي :

① $\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c$

② $\int x^{-4} \, dx = \frac{x^{-3}}{-3} + c$

③ $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c$

④ $\int \frac{1}{x^{-6}} dx = \int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + c$

③ $\int x^{\frac{2}{3}} \, dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$

④ $\int x^{-\frac{3}{2}} \, dx = -2x^{-\frac{1}{2}} + c$

⑤ $\int \sqrt[5]{x^3} \, dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}}$

⑥ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c$

وتذكّر أن :

◈ $a^m \times a^n = a^{m+n}$	◈ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	◈ $(a^m)^n = a^{m.n}$
◈ $a^n \times b^n = (a \times b)^n$	◈ $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$	◈ $(a)^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$

$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

خواص التكاملات غير المحدودة

(1) قاعدة الضرب في ثابت : $\int k \; f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$ حيث k عدداً حقيقيا

(2) قاعدة الجمع والطرح : $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$

تدريب أوجــد التكامل

$\int (4x^3 + 5x - 3) dx$

$= \frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}} + \frac{5x^2}{2} - 3x + c = x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + c$

ملاحظة هامة : لا يمكن توزيع التكامل على الضرب والقسمة

$$\int (f(x) \times g(x)) dx \neq \int f(x) dx \times \int g(x) dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$$

تمرين 1

أوجـد كلاً من التكاملات الآتية :

❶ $\int(12x^3+6x^2+2x-1)dx$

$= \frac{12x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-x+c = 3x^4+2x^3+x^2-x+c$

❷ $\int(3.4x^4-1.2x^3+2.3x-5.7)dx$

$= \frac{3.4x^5}{5}-\frac{1.2x^4}{4}+\frac{2.3x^2}{2}-5.7x+c$

❸ $\int \frac{3x^5+4x^3-5x-6}{2x^3}dx$

$= \int \frac{3x^5}{2x^3}+\frac{4x^3}{2x^3}-\frac{5x}{2x^3}-\frac{6}{2x^3}dx = \int \frac{3}{2}x^2+2-\frac{5}{2}x^{-2}-3x^{-3}dx$

$= \frac{3}{2}\frac{x^3}{3}+2x-\frac{5}{2}\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{3x^{-2}}{-2}+c$

$= \frac{1}{2}x^3+2x+\frac{5}{2x}+\frac{3}{2x^2}+c$

❹ $\int(14.2x^{6.1}-20.1x^{5.7}+13.2x^{2.3}+3)dx$

$= \frac{14.2x^{7.1}}{7.1}-\frac{20.1x^{6.7}}{6.7}+\frac{13.2x^{3.3}}{3.3}+3x+c = 2x^{7.1}-3x^{6.7}+4x^{3.3}+3x+c$

❺ $\int(8x^3+\frac{1}{x^2}-3\sqrt{x})dx$

$= \int 8x^3+x^{-2}-3x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{8x^4}{4}+\frac{x^{-1}}{-1}-3(\frac{2}{3})x^{\frac{3}{2}}+c = 2x^4-\frac{1}{x}-2\sqrt{x^3}+c$

❻ $\int x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{5}{4}}-4)dx = \int x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{4}}dx$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-4(\frac{4}{5})x^{\frac{5}{4}}+c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{16}{5}x^{\frac{5}{4}}+c$

❼ $\int x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{4}{3}}-x)dx = \int x^{-\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}dx = 3x^{\frac{1}{3}}-\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+c = 3\sqrt[3]{x}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}+c$

❽ $\int x(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx = \int x(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}})dx$

$= \int x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$

$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+c$

مدرس المادة : علاء بخيت

قواعد أساسية للتكامل الغير محدود

التكامل غير المحدود	قاعدة الاشتقاق
$\int k\,dx = kx + c$	$\frac{d}{dx}kx = k$ حيث k ثابت
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ; \quad n \neq -1$	$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + c$	$\frac{d}{dx}e^{g(x)} = g'(x)e^{g(x)}$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	$\frac{d}{dx}\ln\lvert f(x)\rvert = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + c$	$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + c$	$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$
$\int \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}x + c$	$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

$\int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{2}$

ويمكن تعميم القاعدة $\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$ على مثيلاتها من تكاملات الدوال المثلثية

ويمكن إثبات $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ ، $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

نظرية (3) بفرض أن $f(x)$, $g(x)$ لهما دوال أصلية ، فيكون لأي عددين ثابتين a , b

$$\int [a f(x) + b g(x)]dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

$\int \frac{4}{9+x^2}dx = 4\int \frac{1}{3^2+x^2} = 4\tan^{-1}\frac{x}{3} + c$

$\int \frac{3x}{x^2+4}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4} = \frac{3}{2}\ln\lvert x^2+4\rvert + c$

مدرس المادة : علاء بخيت

مسافة $s(t) \rightarrow$ سرعة $v(t) \rightarrow$ تسارع $a(t)$

تذكّر أن: $\int v(t)\,dt = s(t) + c$ $\quad \int a(t)\,dt = v(t) + c$ $\quad v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$

تمرين 2

❶ أجرى طلاب إحدى المدارس تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة على ارتفاع $32\ ft$ عن سطح الأرض ($s(0) = 32$)
وتمثّل $v(t) = -32t$ (قدم لكل ثانية) السرعة المتجهة للكرة بعد t ثانية من سقوطها

(a أوجد دالّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها

(b أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض

a) $s(t) = \int v(t)\,dt = \int -32t\,dt$
$= \frac{-32}{2}t^2 + c$
$= -16t^2 + c$
$s(0) = -16(0)^2 + c = 32$
$\boxed{c = 32}$

$s(t) = -16t^2 + 32$

b) $s(t) = 0$
$-16t^2 + 32 = 0$
$\frac{-16t^2}{-16} = \frac{-32}{-16}$

$t^2 = 2$
$t = \cancel{-\sqrt{2}}, \sqrt{2}$
$\boxed{t = \sqrt{2}}$

❷ تسارع جسم عند الهبوط $y''(t) = -9.8\ m/s^2$ ، وبفرض أن السرعة المتجهة الابتدائية
$y'(0) = -30\ m/s$. والموقع الإبتدائي $y(0) = 30000\ m$. أوجد دالة الموقع $y(t)$

المسافة $y(t) \rightarrow$ السرعة $y'(t) \rightarrow$ تسارع $y''(t)$

$y'(t) = \int y''(t)\,dt$
$= \int -9.8\,dt$
$= -9.8t + c$

$y'(0) = -9.8(0) + c = -30$
$c = -30$
$y'(t) = -9.8t - 30$

$y(t) = \int y'(t)\,dt$
$= \int -9.8t - 30\,dt$
$= -\frac{9.8}{2}t^2 - 30t + c$

$y(t) = -4.9t^2 - 30t + c$
$y(0) = 0 - 0 + c = 30000$
$c = 30000$
$y(t) = -4.9t^2 - 30t + 30000$

❸ أوجد الدالة المكانية إذا كانت دالة التسارع $a(t) = 3\sin t + 1$ ، والسرعة المتجهة الابتدائية $v(0) = 0$
والموقع الإبتدائي $s(0) = 0$.

$v(t) = \int a(t)\,dt = \int 3\sin t + 1\,dt = -3\cos t + t + c$

$v(0) = -3\cos 0 + 0 + c = 0$
$-3 + c = 0 \Rightarrow c = 3$

$v(t) = -3\cos t + t + 3$

$s(t) = \int v(t)\,dt = \int -3\cos t + t + 3\,dt = -3\sin t + \frac{t^2}{2} + 3t + c$

$s(0) = -3\sin 0 + 0 + 0 + c = 0$
$\boxed{c = 0}$ $\quad \boxed{s(t) = -3\sin t + \frac{1}{2}t^2 + 3t}$

❹ أوجد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة $(1\,,\,2)$ على تمثيلها البياني ، وميل المماس عند $(1\,,\,2)$ هو 3
$f''(x) = x - 1$

$f(1) = 2 \quad , \quad f'(1) = 3$

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + c$

$f'(1) = \frac{1}{2} - 1 + c = 3$

$c = 3.5$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3.5$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (\frac{1}{2}x^2 - x + 3.5)\,dx$

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^2}{2} + 3.5x + c$

$f(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 3.5 + c = 2$

$c = 2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 3.5 = -\frac{7}{6}$

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^2}{2} + 3.5x - \frac{7}{6}$

❺ أوجد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة $(-1\,,\,1)$ على تمثيلها البياني ، وميل المماس عند $(-1\,,\,1)$ هو 2
$f''(x) = 6x + 4$

$f(-1) = 1, \quad f'(-1) = 2$

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 6x + 4\,dx = \frac{\cancel{6}^{3}x^2}{\cancel{2}} + 4x + c$

$f'(-1) = 3(-1)^2 + 4(-1) + c = 2$

$\boxed{c = 3}$

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$

$f(x) = \int f'(x)\,dx$

$= \int 3x^2 + 4x + 3\,dx = x^3 + 2x^2 + 3x + c$

$f(-1) = 1$

$(-1)^3 + 2(-1)^2 + 3(-1) + C = 1$

$\boxed{C = 3}$

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 3$

❻ أوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط : $f(0) = 2$ و $f'(0) = -3$ و $f''(x) = 12x^2 + 2e^{2x}$

$f'(x) = \int f''(x)\,dx$

$= \int 12x^2 + 2e^{2x}\,dx$

$= 4x^3 + \frac{\cancel{2}e^{2x}}{\cancel{2}} + c$

$f'(0) = 0 + e^0 + c = -3$

$c = -4$

$f'(x) = 4x^3 + e^{2x} - 4$

$f(x) = \int f'(x)\,dx$

$= \int 4x^3 + e^{2x} - 4\,dx$

$= \frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}} + \frac{e^{2x}}{2} - 4x + c$

$f(0) = 0 + \frac{1}{2} - 0 + c = 2$

$c = 1.5$

$f(x) = x^4 + \frac{e^{2x}}{2} - 4x + 1.5$

معلومة

$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$

مثال $\int e^{3x-1}\,dx$

$= \frac{e^{3x-1}}{3} + C$

مدرس المادة : علاء بخيت

تذكّر أن

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$\sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$, $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$

$\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\int \sin 3x\,dx = -\dfrac{\cos 3x}{3} + c$ $\quad \int \sec^2 4x\,dx = \dfrac{\tan 4x}{4} + c$

تمرين 3

أوجـد كلاً من التكاملات الآتية :

1) $\int(2\sin x + \pi\cos\pi x)dx = -2\cos x + \dfrac{\pi\sin\pi x}{\pi} + c$

2) $\int(\sin 3x - \csc^2 x)\,dx = -\dfrac{\cos 3x}{3} + \cot x + c$

3) $\int(\sec\theta\tan\theta + \sec^2\frac{\pi}{3})d\theta = \sec\theta + \sec^2\frac{\pi}{3}\theta + c$ ثابت

4) $\int(\tan^2 x + \cot^2\frac{\pi}{4})dx = \int \sec^2 x - 1 + \cot^2\frac{\pi}{4}\,dx = \tan x - x + \cot^2\frac{\pi}{4}x + c$ ثابت

5) $\int\cos\theta(\sec\theta - \tan\theta)d\theta = \int \cos\theta\sec\theta - \cos\theta\tan\theta\,d\theta = \int \cancel{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\cos\theta}} - \cancel{\cos\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\,d\theta$
$= \theta + \cos\theta + c$

6) $\int(4x - \tan^2\frac{1}{2}x)\,dx = \int 4x - (\sec^2\frac{1}{2}x - 1)\,dx = \dfrac{4x^2}{2} - 2\tan\frac{1}{2}x + x + c$

7) $\int\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx = \int\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx = \int\dfrac{(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}{\cancel{(1+\cos x)}}dx = x - \sin x + c$

8) $\int(\dfrac{\tan x}{\cos x} + \cot^2 3x)dx = \int \sec x\tan x + 1 - \csc^2 3x\,dx = \sec x + x + \dfrac{\cot 3x}{3} + c$

تذكر $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$
$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

نستخدم إذا n زوجية : $\cos^n, \sin^n$

لوحدهم

أوجـد كلاً من التكاملات الآتية :

9) $\int \cos^2 3x \, dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 6x}{6}\right) + c$

تذكير : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

10) $\int (\sin x - \cos x)^2 \, dx = \int \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x \, dx$

$\int 1 - \sin 2x \, dx = x + \frac{\cos 2x}{2} + c$

11) $\int (\sin 2x \csc x)\,dx = \int 2\cancel{\sin x}\cos x \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}}\,dx = 2\sin x + c$

12) $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x - 2\tan x \sec x\,dx$

$= \tan x - 2\sec x + c$

أو

13) $\int \left(\frac{\sec x}{\cot x} - \frac{\cot x}{\sin x}\right)dx = \int \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} - \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{1}}\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}$

$= \int \sec x \tan x - \cot x \csc x \, dx$

$= \sec x + \csc x + c$

$= \int \sec x \tan x - \cot x \csc x \, dx$

$= \sec x + \csc x + c$

14) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\sin^2 x \cancel{\cos^2 x}} - \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}\cos^2 x}\,dx$

$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$= \int \csc^2 x - \sec^2 x \, dx = -\cot x - \tan x + c$

مرافق

15) $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{(1+\sin x)} \cdot \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)}\,dx$

$= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$= \int \sec^2 x - \tan x \sec x \, dx$

$= \tan x - \sec x + c$

16) $\int (\sec^2 x \ \csc^2 x)\,dx$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{(\cos x \sin x)^2}\,dx$

ملاحظة $\frac{\sin 2x}{2} = \cancel{2}\sin x \cos x$

$= \int \frac{1}{(\frac{1}{2}\sin 2x)^2}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}\,dx$

$= \int 4\csc^2 2x \, dx = -\frac{4\cot 2x}{2} + c$

الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة)

اسم الطالب:.......................................

تمرين 4 ① أوجـد كلاً من التكاملات الآتية :

1) $\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \ln|x^2+3| + c$

$2x$

2) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx = \ln|1+\sin x| + c$

$\cos x$

3) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+2x+x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{x^2+1-1}{1+x^2}$

$\int \frac{\cancel{1+x^2}}{\cancel{1+x^2}} + \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x + \ln|1+x^2| + c$ أو

$= \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \ln|1+x^2| + x + c$

4) $\int \frac{e^x}{e+e^x}dx = \ln|e+e^x| + c$

e^x

5) $\frac{1}{2}\int \frac{2x\,e^{x^2}}{2+e^{x^2}}dx = \frac{1}{2}\ln|2+e^{x^2}| + c$

$2x\,e^{x^2}$

6) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}dx = \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2+\sqrt{x}}dx = \ln|2+\sqrt{x}| + c$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مبرهنة

$\frac{a}{b(c+d)} = \frac{\frac{a}{b}}{(c+d)}$

7) $\int (\cot 2x - \tan x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \ln|\sin 2x| + \ln|\cos x| + c$

$2\cos 2x$ $-\sin x$

8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\, e^{\tan x}\,dx = e^{\tan x} + c$

مثال

$\int 3x^2 e^{x^3}dx = e^{x^3} + c$

9) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^x)^2 + 2\cancel{e^x}\cdot\cancel{e^{-x}} + (e^{-x})^2\,dx$

$= \int e^{2x} + 2 + e^{-2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2x + \frac{e^{-2x}}{-2} + c$

$e^x \cdot e^{-x} = e^{x+-x} = e^0 = 1$

$e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}$

10) $\int e^{\sin x + \ln\cos x}dx = \int e^{\sin x}\cdot \cancel{e}^{\cancel{\ln}\cos x}\,dx$

$= \int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

$= e^{\sin x} + c$

$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

$\cancel{e}^{\cancel{\ln} x} = x$

$\int \frac{1}{4+x^2}dx = \int \frac{1}{2^2+x^2} dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$ | $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$ | $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+c$

② أوجـد كلاً من التكاملات الآتية :

11) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int \frac{1}{\sqrt{1^2-x^2}} dx = 4\sin^{-1}\frac{x}{1}+c = 4\sin^{-1}x+c$

12) $\int \frac{3}{4x^2+4}dx = \int \frac{3}{4(x^2+1)} dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{3}{4}\tan^{-1} x+c$

13) $\int \frac{2}{\sqrt{9-9x^2}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{9(1-x^2)}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{3}\sin^{-1}x+c$

14) $\int \frac{5}{2+2x^2}dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{5}{2}\tan^{-1}x+c$

15) $\int \frac{6}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = 6\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = 6\sec^{-1}x+c$.

16) $\int \frac{3}{\sqrt{25-25x^2}}dx = \frac{3}{5}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{3}{5}\sin^{-1}(x)+c$

17) $\int \frac{1}{4+x^2}dx = \int \frac{1}{2^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$

18) $\int \frac{2}{\sqrt{3-x^2}}dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-x^2}}dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$

19) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+3)^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x+3}{1}\right)+c$

المجمـــوع والرمز سيجما

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

المجمـوع : لأي أعداد حقيقية $a_1 , a_2 , \ldots\ldots , a_n$ يكون : $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n$

حيث $i = 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots , n$ ونسمي المتغير i مؤشر المجموع

تدريب

① اكتب في صورة رمز المجموع :

a) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots\ldots + \sqrt{10} = \sum_{i=1}^{10} \sqrt{i}$

b) $3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots\ldots + 45^3$ $\quad \sum_{i=3}^{45} i^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 - - - - + 45^3$

c) $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 99 = \sum_{i=1}^{50} 2i-1 = 1+3+5 - - - - + 99$ فردي

زوجي $2, - - - , 100 \rightarrow \sum_{i=1}^{50} 2i$

② اكتب كل الحدود واحسب المجموع :

a) $\sum_{i=1}^{8} (2i+1) = 3+5+7+9+11+13+15+17 = 80$

b) $\sum_{i=2}^{6} \sin(2\pi i) = \sin 4\pi + \sin 6\pi + \sin 8\pi + \sin 10\pi + \sin 12\pi = 0$

c) $\sum_{i=4}^{10} 5 = 5+5+5+5+5+5+5 = \boxed{35}$; $\boxed{(10-4+1)(5) = 35}$

$6\times5=30$

نظرية (1)

إذا كان n عدد صحيح موجب و c عدد ثابت فإن :

❶ $\sum_{i=1}^{n} c = n\,c$ مجموع الثوابت

❷ $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ مجموع أول n عدد صحيح موجب

❸ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ مجموع مربعات أول n عدد صحيح موجب

$\sum_{i=1}^{20} 3 = 20\times3 = 60$

$\sum_{i=3}^{20} 3 = (20-3+1)(3) = 54$; $\sum_{i=1}^{20} 3 - \sum_{i=1}^{2} 3 = 60 - 6 = 54$; $n-i+1$

$\sum_{i=1}^{20} 3 = 60$

$\sum_{i=1}^{5} i = \frac{5(5+1)}{2} = 15$

$\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{5(6)(11)}{6} = 55$

نظرية (2)

إذا كان n عدد صحيح موجب و c , d عددين ثابتين فإن :

$$\sum_{i=1}^{n} (c\,a_i + d\,b_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$\sum_{i=5}^{70} 4 = \sum_{i=1}^{70} 4 - \sum_{i=1}^{4} 4 = 280 - 16 = 264$

مثال 1 باستخدام النظريتين احسب المجموع $\sum_{i=1}^{20} (2i + 3)$

$$\sum_{i=1}^{20} (2i + 3) = 2\sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 3 = \cancel{(2)}\,\frac{20\,(20+1)}{\cancel{2}} + (3)(20) = 420 + 60 = 480$$

$\sum_{i=1}^{20} 2i+3 = 2\sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 3 = 2\times\frac{20\times21}{2} + 20\times3 = 210 + 60 = \boxed{480}$

مدرس المادة : علاء بخيت

حساب مجموع قيم دالة f

لإيجـاد مجموع قيم دالة نعيد صياغة الدالة (قيم x) حسب المعطيات وذلك في رمز المجموع بحيث يمكننا استخدام قواعد المجموع الواردة في النظريتين 1 و 2 كما في المثال التالي

0.1 0.1 0.1
1.1, 1.2, 1.3, ... 3

$1+0.1i$

$\sum_{i=1}^{20}$

مثال 2 أوجـد مجموع قيم $f(x) = 3x^2 + 2$ للقيم $x=1.1\ ,\ x=1.2\ \ ,\ x=1.3\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ x=3.0$

الحل : لاحظ أن الفرق بين قيم x المتتالية هو 0.1 وأن عـدد القيم 20 قيمة متتالية وبالتالي يمكننا كتابة المتغير x بالصيغة $(1+0.1i)$ لكل $i=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ 20$ ويكون المطلوب إيجـاد $\sum_{i=1}^{20} f(1+0.1\,i)$

$$f(1+0.1i) = 3(1+0.1i)^2 - 4(1+0.1i) + 5$$
$$= 3(1+0.2i+0.01i^2) - 4(1+0.1i) + 5$$
$$= (3+0.6i+0.03i^2) - 4 - 0.4i + 5$$
$$= 0.03i^2 + 0.2i + 4$$

$$\sum_{i=1}^{20} f(1+0.1\,i) = \sum_{i=1}^{20}\left[\,0.03i^2 + 0.2i + 4\,\right]$$
$$= 0.03\sum_{i=1}^{20} i^2 + 0.2\sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 4$$
$$= 0.03\frac{20(21)(41)}{6} + 0.2\frac{20(21)}{2} + 4(20)$$
$$= 86.1 + 42 + 80 = 208.1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تدريب أوجـد مجموع قيم الدالة $f(x) = x^2 + 3$ للقيم $x=0.1\ ,\ x=0.2\ \ ,\ x=0.3\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ x=1.0$

$\sum_{i=1}^{10} f(0.1\,i)$

33.85

$= \sum_{i=1}^{10} (0.1i)^2 + 3$

$= \sum_{i=1}^{10} 0.01 i^2 + 3$

$= 0.01\sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{i=1}^{10} 3$

$= 0.01 \frac{10\times 11\times 21}{6} + 3\times 10$

$= 33.85$

$f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + \ldots\ldots f(1)$

الأول ① الثاني ② الثالث ③

واجب

تمارين

① اكتب في صورة رمز المجموع :

a) $\sqrt{2-1}+\sqrt{3-1}+\sqrt{4-1}+\ldots\ldots+\sqrt{15-1} = \sum_{i=2}^{15}\sqrt{i-1}$

b) $2(1)^2+2(2)^2+2(3)^2+\ldots\ldots+2(14)^2 = \sum_{i=1}^{14}2i^2$

c) $15+20+25+\ldots\ldots+150 = \sum_{i=3}^{30}5i$

② اكتب كل الحدود واحسب المجموع :

a) $\sum_{i=1}^{6}3i^2 = 3+12+27+48+75+108 = 273$

b) $\sum_{i=6}^{10}(4i+2) = 26+30+34+38+42 = 170$

عدد الحدود = الحد العلوي - السفلي + ١

③ استخدام قواعد المجموع لحساب المجموع :

1) $\sum_{i=1}^{45}(3i-4) = \sum_{i=1}^{45}3i - \sum_{i=1}^{45}4 = 3\sum_{i=1}^{45}i - \sum_{i=1}^{45}4$

$= 3\left(\frac{45(46)}{2}\right) - 4\times 45$

$= 2925$

2925

2) $\sum_{i=1}^{40}(4-i^2) = \sum_{i=1}^{40}4 - \sum_{i=1}^{4}i^2 = 160 - \frac{40(41)(83)}{6} = -21980$

-21980

3) $\sum_{k=4}^{20}(k^2-9) = \sum_{k=1}^{20}k^2-9 - \sum_{i=1}^{3}k^2-9$

$= \left(\sum_{k=1}^{20}k^2 - \sum_{k=1}^{20}9\right) - \left(\sum_{i=1}^{3}k^2 - \sum_{i=1}^{3}9\right)$

$= \left(\frac{20(21)(41)}{6} - 9\times 20\right) - \left(\frac{3(4)(7)}{6} - 9\times 3\right) = 2703$

2703

④ استخدام قواعد المجموع لحساب المجموع :

الحد الأول عند $k=0$

2) $\sum_{k=0}^{n}(k^2+5) =$ $(0^2+5) + \sum_{k=1}^{n} k^2+5$ .... $n/6\,(n+1)(2n+1)+5n+5$

ملاحظة
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$5 + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 5 = 5 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5n$

2) $\sum_{k=3}^{n}(k^2-3) =$ $\sum_{k=1}^{n} k^2-3 - (\sum_{k=1}^{2} k^2-3)$ .... $n/6\,(n+1)(2n+1)-3n+1$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 3 - -1$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n + 1$

⑤ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x$ أوجـد المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ لقيم x_i المعطاة

حيث $n=5$, $\Delta x = 0.2$, $x=0.2$, 0.4 , 0.6 , 0.8 , 1.0 .... 2.84

⑥ إذا كان $f(x) = 4x^2 - 2$ أوجـد المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ لقيم x_i المعطاة

حيث $n=10$ ، $\Delta x = 0.1$ ، $x = 2.1\ ,\ 2.2\ ,\ 2.3\ ,\ 2.4\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ 3.0$

24.34

⑦ استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 1$

⑧ استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن : $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

⑨ استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن : $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ لكل الأعداد الصحيحة $n \geq 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

⑩ احسب المجموع ونهاية كل مجموع عندما $n \to \infty$:

❶ $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}[(\frac{i}{n})^2 + 2 (\frac{i}{n})]$ 4/3

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(2)(\frac{i}{n})$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3} i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n^2} i$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\cancel{n^3}\, n^2} \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\cancel{2}}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6n^2} (2n^2+3n+1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+1}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{2\cancel{n^2}}{6\cancel{n^2}} + \frac{3\cancel{n}}{6n^{\cancel{2}}} + \frac{1}{6n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + 1 + \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + 1 + \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{3} + 0 + 0 + 1 + 0$

$= \frac{4}{3}$

❷ $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}[(\frac{2i}{n})^2 + 4 (\frac{i}{n})]$ 10/3

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (\frac{4i^2}{n^2} + \frac{4i}{n})$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^3} + \frac{4i}{n^2}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^{\cancel{3}}\,2} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} \frac{2n^2+3n+1}{6} + \frac{4n+4}{2n}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{8\cancel{n^2}}{6\cancel{n^2}} + \frac{12\cancel{n}}{6n^{\cancel{2}}} + \frac{4}{6n^2} + \frac{4\cancel{n}}{2\cancel{n}} + \frac{4}{2n}$

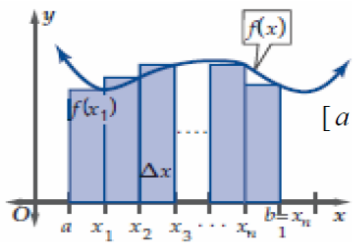
$\lim_{n\to\infty} \frac{8}{6} + \frac{12}{6n} + \frac{4}{6n^2} + 2 + \frac{4}{2n} = \frac{8}{6} + 0 + 0 + 2 + 0$

$= \frac{20}{6}$

مدرس المادة : علاء بخيت

المساحة تحت المنحنى والتكامل

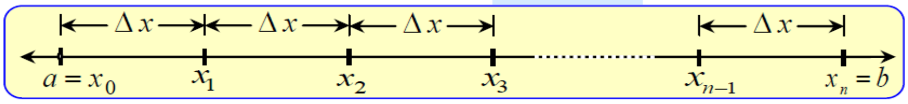
المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف ... ، ولكن إذا كان الشكل غير منتظم (لا تتكون من أشكال أساسية) فإنه يمكننا تقريب المساحة تحت المنحنى وذلك بتقسيم المنطقة إلى مناطق مستطيلة يسهل إيجاد مساحاتها



بفرض أن $f(x) \geq 0$ و f دالة متصلة على الفترة $[a\ ,b]$

نبدأ بتجزئة الفترة $[a\ ,b]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية **(التجزئة المنتظمة)**

طول أي فترة جزئية منها $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ حيث n عدد الفترات، $b-a$ طول الفترة $[a\ ,b]$



وبذلك يكون عرض كل مستطيل $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ وارتفاعه قيمة الدالة عند x_i ومساحته $f(x_i)\cdot\Delta x$

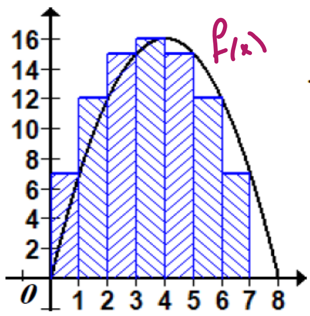
والمساحة الكلية للمستطيلات $A = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \dots + f(x_n)\cdot\Delta x$ أو $A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

مثال 1 تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستخدام المستطيلات

قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 8x - x^2$ والمحور x على الفترة $[0\ ,8]$

a) باستخدام 8 مستطيلات ، b) باستخدام 16 مستطيل (استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه).

✓ نجزئ الفترة $[0\ ,8]$ إلى 8 فترات متساوية طول كل منها $\Delta x = \dfrac{8-0}{8} = 1$



✓ نرسم على كل فترة جزئية مستطيلا أحد بعديه طول الفترة $\Delta x = 1$ ،

والبعد الآخر قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة $f(x_i)$ حيث 8, ... , 3 , 2 , $i = 1$.

✓ نوجد القيمة التقريبية للمساحة بإيجاد مجموع مساحات المستطيلات الثمانية

$$A \approx A_8 = \sum_{i=1}^{8} f(x_i)\ \Delta x$$

$$= [f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)](1)$$

$$= [9+12+15+16+15+12+9+0]\ (1) = 88$$

b) نجزئ الفترة $[0\ ,8]$ إلى 16 فترة متساوية طول كل منها $\Delta x = \dfrac{8-0}{16} = 0.5$ ، فتكون $x_i = 0.5i$

وتكون القيمة التقريبية للمساحة (مجموع مساحات المستطيلات) $A \approx A_{16} = \sum_{i=1}^{16} f(x_i)\ \Delta x$

$$= \sum_{i=1}^{16} f(8x_i - x_i^2)\ \Delta x = \sum_{i=1}^{16} [8(0.5i) - (0.5i)^2](0.5) = 85$$

لاحظ في الحالة a القيمة التقريبية للمساحة 88 بينما في الحالة b المساحة 85 والحقيقة إن المساحة الفعلية $85\frac{1}{3}$

كلما كان عدد الفترات الجزئية n (عدد المستطيلات) أكبر يكون مجموع مساحات المستطيلات أقرب للمساحة الفعلية

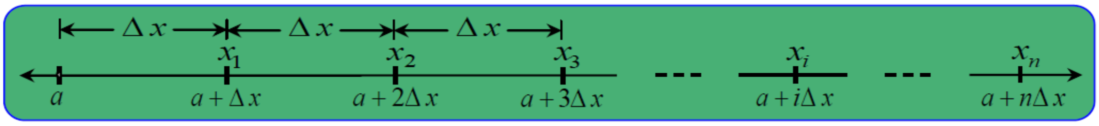
تعريف لكل دالة f معرفة على الفترة $[a\ ,b]$ ، إذا كانت f متصلة على الفترة $[a\ ,b]$ و $f(x) \geq 0$ على $[a\ ,b]$

فإن المساحة تحت منحنى $y = f(x)$ على $[a\ ,b]$ تُعطى بالصيغة :

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\ \Delta x$$

إيجاد قيمة المساحة تحت منحنى بدقة

لتسهيل الحسابات، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي قيمة من قيم xi حيث طول كل فترة جزئية $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$،
وبالنظر إلى خط الأعداد نجد:



$$x_i = a + i\,\Delta x$$

مثال 2 أوجد المساحة تحت المنحنى $f(x)=x^2$ على الفترة $[0\ ,\ 3]$

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = a + i\,\Delta x = 0 + \frac{3}{n} i$$

$$x_i = \frac{3}{n} i$$

$$f(x_i) = (\frac{3}{n} i)^2 = \frac{9}{n^2} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (\frac{9}{n^2} i^2)(\frac{3}{n}) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{27}{n^3} i^2)$$

$$= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i^2) = \frac{27}{n^3}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$= \frac{27}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{9}{2}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = 9$$

المساحة 9 وحدة مربعة

مثال 3 أوجد المساحة تحت المنحنى $f(x)=4x^3$ والمحور x في الفترة $[1\ ,\ 3]$

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{2}{n} \quad / \quad x_i = a + i\,\Delta x \Rightarrow x_i = 1 + \frac{2}{n} i$$

$$f(x_i) = 4[1+3(\frac{2}{n}i)+3(\frac{2}{n}i)^2+(\frac{2}{n}i)^3] = = 4[1+\frac{6}{n}i+\frac{12}{n^2}i^2+\frac{8}{n^3}i^3]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = 4[n+\frac{6}{n}(\frac{n(n+1)}{2})+\frac{12}{n^2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})+\frac{8}{n^3}(\frac{n^2(n+1)^2}{4})][\frac{2}{n}]$$

$$= \frac{8}{n}[n+3(n+1)+\frac{2}{n}(n+1)(2n+1)+\frac{2}{n}(n^2+2n+1)]$$

$$= 8[1+3(1+\frac{1}{n})+2(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})+2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} 8[1+3(1+\frac{1}{n})+2(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})+2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})]$$

$$= 8[1+3(1+0)+2(1+0)(2+0)+2(1+0+0)] = 80$$

المساحة 80 وحدة مربعة

$$A = \int_1^3 4x^3\,dx = \frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}}\Big|_1^3 = 81-1 = 80$$

$4x^3=0$
$x=0$

مدرس المادة : علاء بخيت

تعريف : لتكن $\{x_0 , x_1 , x_2 , ... , x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة f $[\,a\,,\,b\,]$

حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

لكل i اختر النقاط $c_1 , c_2 , ... , c_n$ حيث C_i أي نقطة في فترة جزئية $[x_{i-1} , x_i]$

و هذه النقاط تسمى نقاط القيم ، إن مجموع ريمان لهذه التجزئة ولمجموعة نقاط القيم هو $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

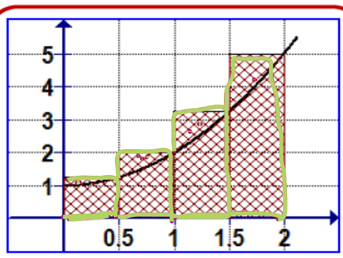
مما سبق نجد أنه لدالة متصلة غير سالبة f تكون المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$

هي نهاية مجاميع ريمـــان $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x$

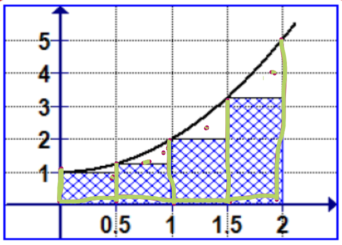
ملحوظة :

في أغلب الأحيان , لا يمكننا إيجاد قيمة نهاية مجموع ريمان المشار إليها في التعريف بدقه . ومع ذلك , يمكننا دائما الحصول على تقريب للمساحه بواسطة إيجاد قيمه مجاميع ريمان لقيم كبيره من n .

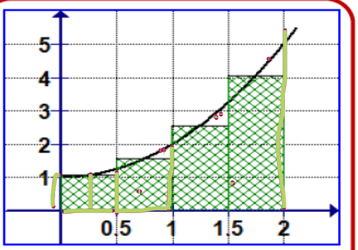
الاختيارات الأكثر شيوعا و وضوحا لنقاط قيم C_i هي x_i (نقطة النهاية اليمنى). x_{i-1} (نقطة النهاية اليسرى) و $1/2(x_{i-1}+x_i)$ (نقطة المنتصف).انظر الأشكال ❶ و ❷ و ❸ لتقريبات نقطة النهاية اليمنى و اليسرى والمنتصف على التوالي. للدالة $f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0 , 2]$, باستخدام $n = 4$. ينبغي أن تلاحظ أنه كما هو الحال مع أي داله متزايده , تعطي المستطيلات المناظره لقيم نقطة النهاية اليمنى(الشكل❶) مساحة كبيره على كل فتره جزئية, بينما تعطي المستطيلات النهاية اليسرى (الشكل❷) مساحة صغيره , لاحظ أن العكس صحيح بالنسبة للدوال المتناقصة.



الشكل ❶ التقريب اليميني



الشكل ❷ التقريب اليساري



الشكل ❸ التقريب المنتصفي

مثال 4 إيجاد مجموع ريمان باستخدام نقاط قيم مختلفة

إيجاد مجموع ريمان للدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1 , 3]$ حيث $n = 10 , 50 , 100 , 500 , 1000 , 5000$ باستخدام نقاط النهاية اليمنى واليسرى والمنتصف لكل فترة جزئية باعتبارها نقاط القيم .

n	نقطة النهاية اليمنى	نقطة المنتصف	نقطة النهاية اليسرى
10	3.50595	3.44789	3.38879
50	3.45942	3.44772	3.43599
100	3.45357	3.44772	3.44185
500	3.44889	3.44772	3.44654
1000	3.44830	3.44772	3.44713
5000	3.44783	3.44772	3.44760

الأعداد المبينة في الجدول هي من برنامج لحاسبة قابلة للبرمجة من هذه الأعداد نستنتج ما يلي :

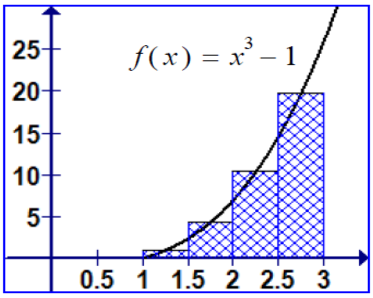
1) المجموعات الثلاث متقاربة من نهاية مشتركة 3.4477 تقريباً

2) في كل مجموعة النهايات تقترب من النهاية المشتركة بمعدلات مختلفة

3) مجموع ريمان الذي يستخدم نقطة المنتصف أدق من قاعدتي نقطة النهاية اليسرى و نقطة النهاية اليمنى

مثال 5 نظم نقاط التقدير المناظرة لنقطة المنتصف لكل فترة جزئية وارسم الدالة ومستطيلات التقريب واوجد قيمة مجموع ريمــان.

$f(x) = x^3 - 1 \quad , [1 , 3] \quad , n = 4$ $\qquad \Delta x = \frac{3-1}{4} = 0.5$



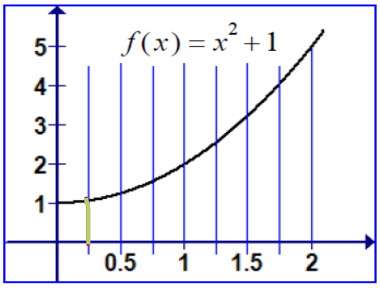
الفترات الجزئية	نقطة المنتصف x_i	$f(x_i)$
$[1 , 1.5]$	1.25	0.9531
$[1.5 , 2]$	1.75	4.3593
$[2 , 2.5]$	2.25	10.39
$[2.5 , 3]$	2.75	19.796
المجمـوع		35.4984

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\,\Delta x = [f(1.25) + f(1.75) + f(2.25) + f(2.75)](0.5) = 17.7492$$

تدريب

نظم نقاط التقدير المناظرة لنقطة المنتصف لكل فترة جزئية وارسم الدوال ومستطيلات التقريب واوجد مجموع ريمان

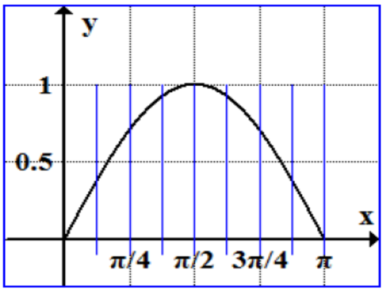
❶ $f(x) = x^2 + 1 \quad , [0 , 2] \quad , \boxed{n = 4}$ $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ 4.625



الفترات الجزئية	نقطة المنتصف x_i	$f(x_i)$
$[0, 0.5]$	0.25	$f(0.25) = 1.06$
$[0.5, 1]$	0.75	$f(0.75) = 1.56$
$[1, 1.5]$	1.25	$f(1.25) = 2.56$
$[1.5, 2]$	1.75	$f(1.75) = 4.06$

$A = 1.06 \times 0.5 + 1.56 \times 0.5 + 2.56 \times 0.5 + 4.06 \times 0.5 = 0.5(1.06 + 1.56 + 2.56 + 4.06)$
$= 4.62$

❷ $f(x) = \sin x \quad , [0 , \pi] \quad , n = 4$ $\qquad$ 2.05234



الفترات الجزئية	نقطة المنتصف x_i	$f(x_i)$

....

....

❀ **تمرين محلول**: قرِّب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلاً وقواعد القيم

a) نقطة النهاية اليمنى   b) نقطة النهاية اليسرى   c) نقطة المنتصف

ملاحظة هامة: اليمني $x_i = a + i\,\Delta x$ / اليسرى $x_{i-1} = a+(i-1)\Delta x$ / المنتصف $x^* = \frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i) = a+(i-\frac{1}{2})\Delta x$

$f(x) = x^2+1 \quad , [0\,,2] \;, \; n = 16$

a) نقطة النهاية اليمنى

$\Delta x = \frac{2-0}{16} = \frac{1}{8}$

$x_i = a + i\,\Delta x = 0 + \frac{1}{8} i$

$f(x_i) = (\frac{1}{8} i)^2 + 1$

$= \frac{1}{64} i^2 + 1$

$$a)\ \sum_{i=1}^{16} f(x_i).\Delta x = \sum_{i=1}^{16}(\frac{1}{64}i^2+1)(\frac{1}{8}) = [\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{16} i^2 + \sum_{i=1}^{16} 1\ ]\,(\frac{1}{8})$$

$$= [\frac{1}{64}\,(\frac{16(16+1)(32+1)}{6}) + 16](\frac{1}{8})$$

$$= \frac{1}{32}\,(\frac{(16+1)(32+1)}{6}) + 2$$

$$= \frac{561}{192} + 2 = 4.921875$$

b) نقطة النهاية اليسرى

$\Delta x = \frac{2-0}{16} = \frac{1}{8}$

$x_{i-1} = a+(i-1)\Delta x$

$x_{i-1} = 0+(i-1)\frac{1}{8} = \frac{i}{8} - \frac{1}{8}$

$f(x_{i-1}) = (\frac{i}{8}-\frac{1}{8})^2 + 1$

$= \frac{i^2}{64} - \frac{i}{32} + \frac{65}{64}$

$$b)\ \sum_{i=1}^{16} f(x_{i-1}).\Delta x = \sum_{i=1}^{16}(\frac{i^2}{64} - \frac{i}{32} + \frac{65}{64})(\frac{1}{8})$$

$$= [\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{16} i^2 + \frac{1}{32}\sum_{i=1}^{16} i + \sum_{i=1}^{16}\frac{65}{64}\ ]\,(\frac{1}{8})$$

$$= [\frac{1}{64}\,(\frac{16(17)(33)}{6}) - \frac{1}{32}\,(\frac{16(17)}{2} + \frac{65}{4}](\frac{1}{8})$$

$$= [\frac{(17)(33)}{24} - \frac{(17)}{4} + \frac{65}{4}](\frac{1}{8})$$

$$= 4.421875$$

c) نقطة المنتصف

$\Delta x = \frac{2-0}{16} = \frac{1}{8}$

$x^* = a+(i-\frac{1}{2})\Delta x$

$x^* = 0+(i-\frac{1}{2})\frac{1}{8} = \frac{i}{8} - \frac{1}{16}$

$f(x^*) = (\frac{i}{8} - \frac{1}{16})^2 + 1$

$= \frac{i^2}{64} - \frac{i}{64} + \frac{257}{256}$

$$c)\ \sum_{i=1}^{16} f(x^*).\Delta x = \sum_{i=1}^{16}(\frac{i^2}{64} - \frac{i}{64} + \frac{257}{256})(\frac{1}{8})$$

$$= [\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{16} i^2 - \frac{1}{64}\sum_{i=1}^{16} i + \sum_{i=1}^{16}\frac{257}{256}\ ]\,(\frac{1}{8})$$

$$= [\frac{1}{64}\,(\frac{16(17)(33)}{6}) - \frac{1}{64}\,(\frac{16(17)}{2} + \frac{257}{16}](\frac{1}{8})$$

$$= [\frac{(17)(33)}{24} - \frac{(17)}{8} + \frac{257}{16}](\frac{1}{8})$$

$$= 4.6640625$$

لاحظ أنه عند نقطة المنتصف تكون القيمة التقريبية أقرب للقيمة الفعلية $(14/3 = 4.6666667)$
سواءً كانت الدالة متزايدة أو متناقصة

مدرس المادة : علاء بخيت

تمــارين

① قرِّب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلاً وقواعد القيم

a) نقطة النهاية اليمنى b) نقطة النهاية اليسرى c) نقطة المنتصف

$f(x) = x^2 + 1 \quad , [0, 1] \ , \ n = 16$

$a) \approx 1.3652$	$b) \approx 1.3027$	$c) \approx 1.3330$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} f(c_i)\,\Delta x$

تكامل محدد = مجموع ريمان

a) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{16} = \frac{1}{16}$

$x_i = a + i\,\Delta x$

$= 0 + i\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16} i$

$f(x_i) = \left(\frac{1}{16} i\right)^2 + 1$

$= \frac{1}{256} i^2 + 1$

$A = \sum_{i=1}^{16} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{16} \left(\frac{1}{256} i^2 + 1\right) \frac{1}{16}$

$= \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{4096} i^2 + \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{4096} \sum_{i=1}^{16} i^2 + \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{4096} \cdot \frac{16(17)(33)}{6} + \frac{1}{16}(16)$

$= 1.36$

② قرّب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلاً وقواعد القيم
a) نقطة النهاية اليمنى b) نقطة النهاية اليسرى c) نقطة المنتصف

$a)\approx -1.98$ $b)\approx -2.02$ $c)=-2$ لماذا كل الإجابات سالبة؟ $n=100$, $[0\ ,\ 1]$, $f(x)=x^3-1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

③ استخدم قيم الدالة المعطاة (في الجدول) لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى في كل مما يأتي:

❶

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

$L=3.08$

$R=3.08$

....

....

....

....

❷

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.8	1.4	1.1	0.7	1.2	1.4	1.8	2.4	2.6

$L=1.182$

$R=1.262$

....

....

....

....

④ للقطع المكافئ العام $f(x)=a^2-x^2$ حيث $-a\le x\le a$ أوضح أن المساحة تحت القطع المكافئ هي ثلثي القاعدة مضروبة في الارتفاع بمعنى $[\ A=\frac{2}{3}(2a)(a^2)\ ]$ **(مساعدة استخدم نهاية مجموع ريمان)**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

⑤ استخدم مجموع ريمان والنهاية لإيجاد القيمة الدقيقة لمساحة المنطقة تحت المنحنى في كل مما يأتي:

❶ $f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad [0, 2]$ $A = 26/3$

....

❷ $f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad [1, 3]$ $A = 32/3$

....

اسم الطالب:... الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

ملاحظة هامة :

✓ المجموع الأعلى للدالة f على P هو $U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$ حيث $f(c_i)$ القيمة العظمى على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

✓ المجموع الأدنى للدالة f على P هو $L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} f(d_i)\,\Delta x$ حيث $f(d_i)$ القيمة الصغرى على الفترة الجزئية

❖ إذا كانت الدالة متزايدة فإن القيم العظمى للدالة تكون عند نقطة النهاية اليمنى $f(x_i)$ والصغرى علد اليسرى $f(x_{i-1})$
أما إذا كانت الدالة متناقصة فإن القيم العظمى للدالة تكون عند نقطة النهاية اليسرى $f(x_{i-1})$ والصغرى عند اليمنى $f(x_i)$

⑥ أوجد المجموع الأعلى والمجموع الأدنى للدالة $f(x)=x^2$ على $[-2, 2]$ للتجزئة المنتظمة حيث $n=8$

$\Delta x=$

x	-2.0	-1.5							
$f(x)$	4	2.25							

$U=7.5$

$L=3.5$

....
....
....
....

⑦ أوجد المجموع الأعلى العام والأدنى العام للدالة $f(x)=x^2$ على $[0, 2]$، هل يقتربان من العدد نفسه عندما $n\to\infty$ ؟

$U=8/3$ $L=8/3$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

$\int_2^3 f(x)\,dx = 7$

$\int_3^5 f(x)\,dx = -6$

التكامل المحدود

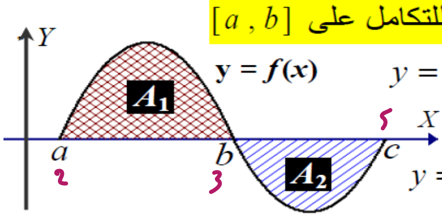
تعريف لأي دالة f معرفة على الفترة $[a\,,b]$ ، يكون التكامل المحدود للدالة f من a إلى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x$$

نأخذ مجموع ريمان $n \to \infty$

وذلك لكل اختيار من نقاط القيم $c_1\,, c_2\,, \ldots, c_n$ ، وإذا كانت النهاية موجودة نقول f قابلة للتكامل على $[a\,,b]$

نظرية (1) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a\,,b]$ ، فإن f تكون قابلة للتكامل على $[a\,,b]$



تعريف بفرض أن $f(x) \ge 0$ على $[a\,,b]$ ، و A_1 المساحة بين منحنى $y = f(x)$ والمحور x لكل $a \le x \le b$ ،

وعلى فرض أن $f(x) \le 0$ على $[b\,,c]$ ، و A_2 المساحة بين منحنى $y = f(x)$ والمحور x لكل $b \le x \le c$

فإن $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x = A_1 - A_2$ (المساحة المشار إليها بين $y = f(x)$ والمحور x لكل $a \le x \le c$)

والمساحة الإجمالية بين $y = f(x)$ والمحور x لكل $a \le x \le c$ هي $A_1 + A_2$

وعموما **مجموع ريمان = مجموع مساحات المستطيلات فوق المحور x − مجموع مساحات المستطيلات تحت المحور x**

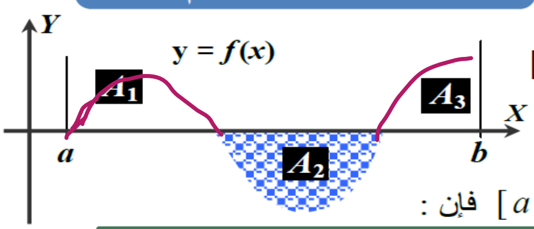
العلاقة بين التكامل المحدود والمساحة تحت منحنى

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للتكامل فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A_1$ عندما $f(x) \ge 0$ لكل $a \le x \le b$

$\int_b^c f(x)\,dx = -A_2$ عندما $f(x) \le 0$ لكل $b \le x \le c$ **انظر الشكل السابق**

ويكون $\int_a^c f(x)\,dx = A_1 - A_2$ لكل $a \le x \le c$

مما سبق نجد أنه يمكننا حساب التكامل باستخدام المساحة وحساب المساحة باستخدام التكامل



❖ في الشكل المقابل $y = f(x)$ دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a\,,b]$

لاحظ أن: $\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$

نظرية (2) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل على الفترة $[a\,,b]$ فإن :

1) لأي عددين ثابتين $c\,,d$ يكون : $\int_a^b [c\,f(x) + d\,g(x)]\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx$

2) لأي عدد ثابت c في $[a\,,b]$ يكون : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

مدرس المادة : علاء بخيت

تدريب ① استخدم المساحات لإيجاد قيمة التكامل:

بالاستعمال المساحة

❶ $\int_{-1}^{4}(2-x)dx$ $= 4.5 + -2 = \boxed{2.5}$

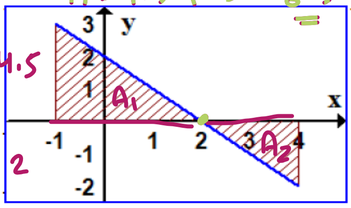
$A = 4.5 + 2 = 6.5$

$A_1 = \frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$

$A_2 = \frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$

حسب قواعد التكامل

$\int_{-1}^{4} 2 - x\,dx = 2x - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{4} = (0 - -2.5) = 2.5$

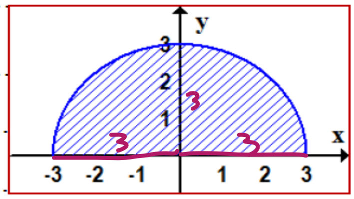


❷ $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\;dx = 4.5\pi$

مساحة الدائرة $= \pi r^2$

$A = \frac{\pi(3)^2}{2}$

$= 4.5\pi$



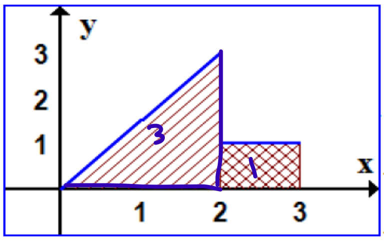
② استخدم النظرية (2) لكتابة كل تعبير في صورة تكامل منفرد

❶ $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

❷ $\int_{0}^{3} f(x)\,dx - \int_{2}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\,dx$

إيجاد التكامل لمكامل غير متصل

مثال 1 أوجد قيمة $\int_0^3 f(x)\,dx$ حيث $f(x) = \begin{cases} 3/2\,x & ;\ x \le 2 \\ 1 & ;\ x > 2 \end{cases}$



$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{2}x\,dx + \int_2^3 1\,dx$

$= \frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 1(3-2) = \frac{3}{4}(4-0) + 1 = 3 + 1 = 4$

نظرية (3) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل على الفترة $[a\,,\,b]$

وكان $g(x) \le f(x)$ لكل $a \le x \le b$ فإن : $\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$

تدريب إذا كانت $f(x) \ge 4$ على $[1\,,3]$ أوجد أصغر قيمة للتكامل $\int_1^3 (2f(x)-3)\,dx$

$(f(x) \ge 4) \times 2$

3 نطرح

$2f(x) \ge 8$

$2f(x) - 3 \ge 8 - 3$

$2f(x) - 3 \ge 5$

$\int_1^3 2f(x) - 3\,dx \ge \int_1^3 5\,dx$

$\int_1^3 (2f(x) - 3)dx \ge 5(3-1)$

$\int_1^3 (2f(x) - 3)dx \ge 10$

❖ إذا كانت $f(x)=c$ ، حيث c عدد ثابت على $[a\,,b]$ فإن : $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

مثال أوجد قيمة التكامل في كل مما يلي :

a) $\int_{-1}^{2} 4\,dx = 4(2--1) = 12$ b) $\int_{2}^{2.5} [x]\,dx = \int_2^{2.5} 2\,dx = 2(2.5-2) = 1$

$[1,3]$ $f(x) = x^2$

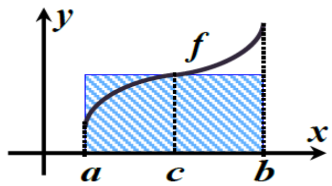
تعريف القيمة المتوسطة :

إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a\,,b]$ ، فإن القيمة المتوسطة على الفترة $[a\,,b]$ هي : 3

$1, 1.2, 1.4, 1.6 \ldots 3$
$1, 1.1, 1.2 \ldots$
$1, 1.01, 1.02 \ldots$

$$f_{avr} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x\right] \Rightarrow f_{avr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

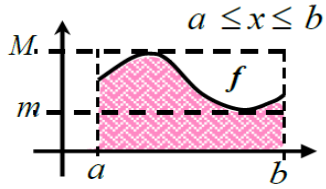
ملحوظة :



❖ يمكن صياغة العلاقة السابقة بالصورة $av(f)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$ (عرض الفترة)
وهذا يعني أن المساحة بين منحنى f والمحور X على الفترة $[a\,,b]$ تساوي
مساحة المستطيل الذي قاعدته $(b-a)$ وارتفاعه القيمة المتوسطة للدالة f_{avr}

❖ إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a\,,b]$ ، فإن لها قيمة صغرى m وقيمة عظمى M في $[a\,,b]$ ومنه

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$ لكل $a \le x \le b$



$$\Rightarrow m.(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M.(b-a)$$

هذه المتباينة تمكننا من تقدير قيمة تكامل محدود

تدريب ❶ قدّر قيمة التكامل $\int_0^{\pi}(1+\sin^2 x)\,dx$

$f(x) = 1+\sin^2 x = 1+(\sin x)^2$
$f'(x) = 2(\sin x)(\cos x) = \sin 2x = 0$
$2x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}$
$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$f(0) = 1$ صغرى مطلقة
$f(\pi) = 1$ صغرى مطلقة
$f(\frac{\pi}{2}) = 2$ عظمى مطلقة

$0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi$

$1 \le 1+\sin^2 x \le 2$
$\int_0^{\pi} 1\,dx \le \int_0^{\pi} 1+\sin^2 x\,dx \le \int_0^{\pi} 2\,dx$
$\pi \le \int_0^{\pi} 1+\sin^2 x\,dx \le 2\pi$

❷ إذا كان $\int_4^6 f(x)\,dx = 4$ ، $\int_1^4 2f(x)\,dx = 12$ احسب متوسط التكامل f_{avr} على الفترة $[1\,,6]$

خاصية الجمع
$1 \quad 4 \quad 6$

$f_{avr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
$= \frac{1}{6-1}\int_1^6 f(x)\,dx$
$= \frac{1}{5}(10) = \boxed{2}$

$\int_1^6 f(x)\,dx = \int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx$
$= 6 + 4 = 10$

$5\times 2 = \int_1^6 f(x)\,dx$

اسم الطالب:... الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

نظرية (4) (نظرية القيمة المتوسطة في التكامل)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a\ ,\ b]$ فإنه يوجد عدد $c\in[a\ ,\ b]$ بحيث يكون

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

لاحظ أن $f(c) = f_{avr}$

تدريب

❶ لتكن الدالة $f(x)=\frac{1}{3}x^2+1$ ، حيث $\int_0^3 f(x)\,dx = 6$

1) أوجد القيمة المتوسطة للدالة في الفترة $[0\ ,\ 3]$

$f_{avr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{3}(6) = \boxed{2}$

2) عند أي من نقاط الفترة $[0\ ,\ 3]$ تأخذ الدالة هذه القيمة المتوسطة؟

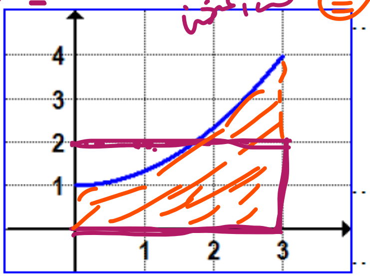
$f(c) = f_{avr} \Rightarrow \frac{1}{3}c^2+1 = 2$

$\frac{1}{3}c^2 = 2-1 \Rightarrow \frac{1}{3}c^2 = 1$

$c^2 = 3$

$c = \sqrt{3}\ ,\ \cancel{-\sqrt{3}}$

$\int_0^3 f(x)dx =$ المساحة $= 6$



3) ارسم المستطيل الذي أحد بعديه طول الفترة $[0\ ,\ 3]$ ، وبعده الآخر f_{avr}
استنتج العلاقة بين مساحة هذا المستطيل والمساحة بين منحنى f والمحور X

$3 \times 2 = 6$

أي $\int_0^3 f(x)dx = (b-a)\,f_{avr}$

❷ إذا كان $\int_6^4 f(x)\,dx = 2$ $\int_3^4 2f(x)\,dx = 6$ $\int_0^3 f(x)\,dx = 8$

1) احسب متوسط التكامل للدالة $f(x)$ على الفترة $[0\ ,\ 6]$

$f_{avr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$= \frac{1}{6-0}\int_0^6 f(x)dx$

$= \frac{1}{6}(9) = 3/2 = \boxed{1.5}$

خاصية تجزيء : 0 3 4 6

$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$

$= 8 + 3 + -2 = 9$

2) ما هو البعد الآخر للمستطيل الذي أحد بعديه (f_{avr}) ومساحته مساوية لقيمة $\int_0^6 f(x)\,dx$

$(b-a)\,f_{avr} = \int_a^b f(x)dx$

مستطيل $b-a$ الطول ، f_{avr} العرض

$f(x)$ موجبة ومحددة بالفترة $[a,b]$

البعد مستطيل 6 ، 1.5

مدرس المادة : علاء بخيت

تمـــارين

① استخدم قاعدة المنتصف مع $n = 6$ لتقدير قيمة التكامل في كل مما يلي :

1) $\int_0^3 (x^3+x)\ dx$ ≈ 24.47

....

....

....

....

2) $\int_{-2}^4 e^{-x^2}\ dx$ ≈ 1.7665

....

....

....

....

② أعط تفسير مساحة لكل تكامل مما يلي :

1) $\int_0^1 e^x\ dx$

....

....

....

2) $\int_0^1 (x^2-2)\ dx$

....

....

....

3) $\int_0^2 (x^2-3x^2+2x)\ dx$

....

....

....

③ أوجـد قيمة التكامل بحساب نهــاية مجموع ريمان في كل مما يأتي:

❶ $\int_0^1 2x\,dx$

....

....

....

....

....

❷ $\int_1^3 (x^2-3)\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

④ اكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات :

1) المساحة فوق المحور X وتحت منحنى $y=4-x^2$

$4-x^2=0 \quad x=2,-2$

$\int_{-2}^{2} 4-x^2\,dx = 10.6 \qquad A = 10.6$

2) المساحة فوق المحور X وتحت منحنى $y=4x-x^2$

$4x-x^2=0 \Rightarrow x=4 , x=0$

$\int_0^4 4x-x^2\,dx = \frac{32}{3}$

3) المساحة تحت المحور X وفوق منحنى $y=x^2-4x$

$x^2-4x=0 \quad x=0,4$

$A = \frac{32}{3}$

$\int_0^4 x^2-4x\,dx = -\frac{32}{3}$

4) المساحة بين $y=\sin x$ والمحور X حيث $-\pi/2 \le x \le \pi/4$

$\sin x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/4}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

مدرس المادة : علاء بخيت

Ministry of Education
Schools Operations Sectors
Emirates Educational 2 Council 5
Zayed educational complex (boys)

وزارة التربية والتعليم
قطاع العمليات المدرسية
مجلس الإمارات التعليمي 2 نطاق5
مجمع زايد التعليمي

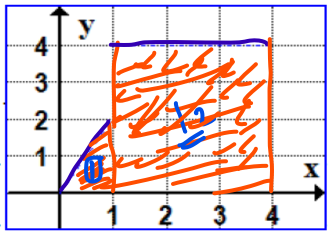
اسم الطالب:.. الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

⑤ في كل مما يلي أوجد قيمة التكامل للدالة المعطاة : (باستخدام القوانين الهندسية للمساحة)

❶ $\int_0^4 f(x)\,dx = 1+12 = 13$; $f(x)=\begin{cases} 2x & ; x<1 \\ 4 & ; x\ge 1\end{cases}$

$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^4 4\,dx$

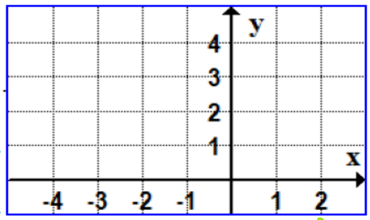
$= \frac{2x^2}{2}\Big|_0^1 + 4(4-1) = (1-0)+12 = 13$



❷ $\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$; $f(x)=\begin{cases} x+4 & ; x<-1 \\ 2-x & ; x\ge -1\end{cases}$

$\int_{-4}^{2} f(x)dx = \int_{-4}^{-1} x+4\,dx + \int_{-1}^{2} 2-x\,dx$

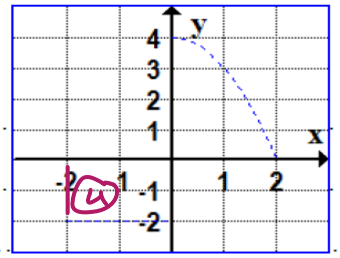
$= \frac{x^2}{2}+4x\Big|_{-4}^{-1} + 2x-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = 4.5+4.5 = 9$



❸ $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$; $f(x)=\begin{cases} -2 & ; x<0 \\ 4-x^2 & ; x\ge 0\end{cases}$

$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} -2\,dx + \int_0^2 4-x^2\,dx$

$= -2x\Big|_{-2}^{0} + 4x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = -4+5.3 = 1.3$

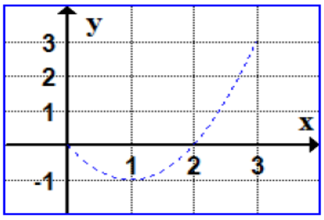


⑥ ارسم المساحة المناظرة للتكامل :

❶ $\int_0^3 (x^2-2x)\,dx$

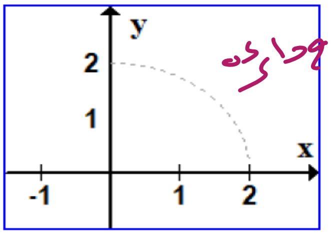
$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\Big|_0^3$

$= 11.25$



❷ $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

$= 3.14$

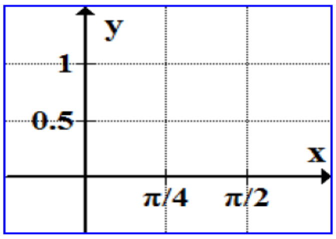


ربع دائرة

❸ $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

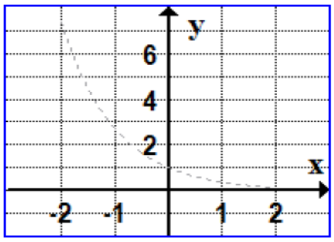
$= 1$



❹ $\int_{-2}^{2} e^{-x}\,dx$

$= \frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{-2}^{2}$

$= -e^{-2}+e^{2}$



مدرس المادة : علاء بخيت

⑦ احسب القيمة المتوسطة للدالة في الفترة المعطاة

❶ $f(x) = 2x + 1 \quad , \quad [0, 4]$

$f_{av} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{4-0}\int_0^4 2x+1\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + x \Big|_0^4\right)$

$= \frac{1}{4}(20 - 0) = 5$

❷ $f(x) = x^2 - 1 \quad , \quad [1, 3]$

$f_{av} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - x \Big|_1^3\right)$

$= \frac{1}{2}\left(6 - -\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$

❸ $f(x) = 2x - x^2 \quad , \quad [0, 1]$

$f_{avr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$= \frac{1}{1-0}\int_0^1 2x - x^2\,dx$

$= \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \boxed{\frac{2}{3}}$

مدرس المادة : علاء بخيت

⑧ استخدم نظرية ا القيمة المتوسطة في التكامل لتقدير قيمة كل من التكاملات الأتية :

❶ $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\cos x \, dx$

$f(x) = 2\cos x$

$f'(x) = -2\sin x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi$ لا تنتمي للفترة التكامل

نلتزم بفترة التكامل

$\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{3}) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ عظمى مطلقة

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$ صغرى مطلقة

$0 \le 2\cos x \le 1 \Rightarrow \int_{\pi/3}^{\pi/2} 0 \, dx \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\cos x \, dx \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} 1 \, dx$

$0 \le \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\cos x \, dx \le \frac{\pi}{6}$

❷ $\int_0^2 \sqrt{2x^2+1} \, dx$

$f(x) = \sqrt{2x^2+1}$

$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}$

أصفار $x = 0$ لا يوجد اصفار للمقام

0 2

$f(0) = 1$ صغرى مطلقة

$f(2) = 3$ عظمى مطلقة

$1 \le \sqrt{2x^2+1} \le 3$

$\int_0^2 1 \, dx \le \int_0^2 \sqrt{2x^2+1} \, dx \le \int_0^2 3 \, dx$

$2 \le \int_0^2 \sqrt{2x^2+1} \, dx \le 6$

❸ $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2} \, dx$

$f(x) = \frac{3}{x^3+2}$

$f'(x) = \frac{-3(3x^2)}{(x^3+2)^2}$

اصفار البسط $x = 0$

اصفار المقام لا يوجد

-1 0 1

$f(-1) = 3$ عظمى مطلقة

$f(1) = 1$ صغرى مطلقة

$1.5 \le \frac{3}{x^3+2} \le 3$

$\int_{-1}^{1} 1 \, dx \le \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2} \, dx \le \int_{-1}^{1} 3 \, dx$

$2 \le \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2} \, dx \le 6$

⑨ أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة في التكامل في الحالتين :

❶ $\int_0^2 3x^2 \, dx = 8$

$f(x) = 3x^2$

لإيجاد f_{avr}

$f_{avr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$= \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}(8) = 4$

$f(c) = f_{avr}$

$3c^2 = f_{avr}$

$3c^2 = 4$

$c^2 = \frac{4}{3}$

$c = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ~~$-\frac{2}{\sqrt{3}}$~~ لا تنتمي للفترة $(0,2)$

❶ $\int_{-1}^{1} (x^2 - 2x) \, dx = 2/3$

$f_{avr} = \frac{1}{1--1}\int_{-1}^{1} (x^2 - 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$

$f(x) = x^2 - 2x$

$f(c) = f_{avr}$

$c^2 - 2c = \frac{1}{3}$

$c^2 - 2c - \frac{1}{3} = 0$

$c = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ نرفض ، $c = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ ✓

Ministry of Education
Schools Operations Sectors
Emirates Educational 2 Council 5
Zayed educational complex (boys)

وزارة التربيـة والتعليم
قطاع العمليات المدرسية
مجلس الإمارات التعليمي 2 نطاق5
مجمع زايد التعليمي

اسم الطالب:...................................... الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

1) إذا كانت f متصلة على $[1\ ,4]$ وكان $\int_3^4 f(x)\,dx = -2$, $\int_2^4 f(x)\,dx = 9$, $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ أوجد :

a) $\int_1^4 f(x)\,dx =$ $\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx = 5 + -2 = 3$

ترتيب الأعداد

1 ... 2 ... 3 ... 4

b) $\int_2^3 f(x)\,dx =$ 11

$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$

$9 = \int_2^3 f(x)\,dx + -2 \Rightarrow \int_2^3 f(x)\,dx = 9+2 = 11$

c) $\int_1^2 f(x)\,dx =$ -6

$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

$5 = \int_1^2 f(x)\,dx + 11 \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx = 5 - 11 = -6$

2) أثبت أن $\sin(1) \le \int_1^2 x^2 \sin x\,dx \le 4$

$1 \le x \le 2 \Rightarrow 1 \le x^2 \le 4$ 	$\sin x$ نضرب

$\sin x \le x^2 \sin x \le 4 \sin x$

$\int_1^2 \sin x\,dx \le \int_1^2 x^2 \sin x\,dx \le \int_1^2 4 \sin x\,dx$

$\cos 1 - \cos 2 \le \int_1^2 x^2 \sin x\,dx \le 4(\cos 1 - \cos 2)$

$\sin 1 \le \cos 1 - \cos 2 \le \int_1^2 x^2 \sin x\,dx \le 4(\cos 1 - \cos 2) \le 4$

ملاحظة

$\sin 1 \le \cos 1 - \cos 2$

$4(\cos 1 - \cos 2) \le 4$

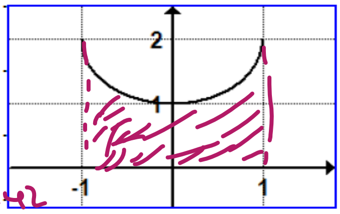
باستخدام الآلة

3) استخدم المساحة لإيجاد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ في الفترة $[-1\ ,1]$

$f_{avr} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 2 - \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(2.42) = 1.21$

مساحة المستطيل – نصف مساحة الدائرة

$4 - \frac{\pi}{2} = \frac{8-\pi}{2} = 2.42$



4) إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[-1\ ,4]$ تساوي 8 ، والقيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[4\ ,6]$ تساوي k ، والقيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[-1\ ,6]$ تساوي 18 ، أوجــــد قيمة k.

$\int_{-1}^{6} f(x)\,dx = \int_{-1}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{6} f(x)\,dx$

-1 ... 4 ... 6

$f_{avr} = 8$ 	$f_{avr} = k$

$18(6 - -1) = 8(4 - -1) + k(6-4)$

$\int_a^b f(x)\,dx = f_{avr}(b-a)$

$126 = 40 + 2k$

$\frac{86}{2} = \frac{2k}{2} \Rightarrow k = 43$

مدرس المادة : علاء بخيت

اسم الطالب:.. الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

نظرية (1) (النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل / الجزء الأول /)

إذا كانت f متصلة على الفترة $[a , b]$ و $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ فإن
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

تدريب

استخدم النظرية الأساسية لحساب التكاملات المحدودة الآتية :

❶ $\int_0^2 (x^2 - 2x)\, dx$ $= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \Big|_0^2 = (\frac{8}{3} - 4) - 0 = \frac{-4}{3}$

❷ $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ $= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - -\cos 0 = 1 + 1 = 2$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

❸ $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x} dx$ $= 2\ln|x| \Big|_3^1 = 2\ln 1 - 2\ln 3$

❹ $\int_1^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{x^2})\, dx$ $= \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} - x^{-2}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} \Big|_1^4$

$= \frac{67}{12} - \frac{5}{3} = \frac{47}{12}$

نظرية (النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل / الجزء الثاني /)

إذا كانت f متصلة على الفترة $[a , b]$ و $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ فإن $F'(x) = f(x)$

وبصورة عامة $\frac{d}{dx}\int_a^u f(t)\, dt = f(u) \times \frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\int_u^v f(t)\, dt = f(v) \times \frac{dv}{dx} - f(u) \times \frac{du}{dx}$

مثال 1 إذا كان $F(x) = \int_2^{x^2} \cos t\, dt$ احسب $F'(x)$

بفرض $u(x) = x^2$ فيكون :

$$F'(x) = \cos u \frac{du}{dx} = \cos u(2x) = 2x \cos x^2$$

$\frac{d}{dx}\left(\int_1^3 \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} dx\right) = 0$

$\frac{d}{dx}\left(\int \sqrt{x}\, dx\right) = \sqrt{x}$

مدرس المادة: علاء بخيت

مثال 2 إذا كان $F(x)=\int_{2x}^{x^2}\sqrt{t^2+1}\,dt$ احسب $F'(x)$

بفرض $u(x)=2x$ و $v(x)=x^2$ فيكون :

$$F'(x)=\sqrt{v^2+1}\,\frac{dv}{dx}-\sqrt{u^2+1}\,\frac{du}{dx}$$
$$=\sqrt{(x^2)^2+1}\,\frac{d}{dx}(x^2)-\sqrt{(2x)^2+1}\,\frac{d}{dx}(2x)$$
$$=2x\sqrt{x^4+1}-2\sqrt{4x^2+1}$$

المشتقة

مثال 3 خزان يتدفق فيه الماء ويتسرب خارجه فإذا كان المعدّل الصافي لتغيّر الماء $f(t)=20\,(t^2-1)$ لترات في الدقيقة

a) لكل $0\le t\le 3$ حدد متى يزداد مستوى الماء ومتى ينخفض

b) إذا كان في الخزان 200 لتر من الماء عندما $t=0$ ، حدد كم لتر يكون في الخزان عندما $t=3$ دقائق

الحل **a)** بفرض $w(t)$ عدد اللترات في الخزان عند الزمن t ، إذا كان $0\le t<1$ فإن

$$t^2<1\Rightarrow t^2-1<0$$
$$\Rightarrow\ w'(t)=f(t)=20\,(t^2-1)<0$$

$t^2-1=0$
$t=1,-1$

0 1 3

مستوى الماء ينخفض عندما $0\le t<1$

وعندما $1<t\le 3$ فإن $w'(t)=f(t)>0$ ومستوى الماء يزداد

b) لدينا $w'(t)=20\,(t^2-1)$ بالتكامل من $t=0$ إلى $t=3$ نجد :

$\int_0^3 w'(t)\,dt=\int_0^3 20\,(t^2-1)$
$=120$
$w(3)-w(0)$
200

$$\int_0^3 w'(t)\,dt=\int_0^3 20\,(t^2-1)\,dt$$
$$w(3)-w(0)=\left[20\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\right]_0^3$$

وبما أن $w(0)=200$ فإن

$$w(3)-200=20\,(9-3)=120\Rightarrow\ w(3)=320$$

مثال 4 للدالة $F(x)=\int_4^{x^2}\ln(t^2+4)\,dt$ أوجد معادلة المماس عند $x=2$

$$F'(x)=\ln[(x^2)^2+4]\,\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$=\ln[(x^2)^2+4]\,(2x)$$
$$=2x\ln(x^4+4)$$
$$F'(2)=4\ln(20)\approx 12$$

ولإيجاد نقطة التماس عند $x=2$ نعوض في الدالة الأصلية

$F(2)=\int_4^4\ln(t^2+4)\,dt=0$ لاحظ أن حدود التكامل متساوية

معادلة المماس عند النقطة $(2\ ,\ 0)$ هي $y=12(x-2)$

مدرس المادة : علاء بخيت

واجب

تمارين

① استخدم النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة :

❶ $\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4}+1\right) - \left(\frac{1}{4}+1\right) = 0$

❷ $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 x\, dx = \tan x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

❸ $\int_{1}^{2} (4x - \frac{2}{x^2})\, dx = \int_1^2 4x - 2x^{-2}\, dx = \frac{4x^2}{2} - \frac{2x^{-1}}{-1}\Big|_1^2 = 2x^2 + \frac{2}{x}\Big|_1^2$

$= (8+1) - (2+2) = 5$

❹ $\int_{1}^{4} (x\sqrt{x} + \frac{3}{x})\, dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{x}\, dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 3\ln x\Big|_1^4 = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 3\ln x\Big|_1^4$

$= \left(\frac{2}{5}(32) + 3\ln 4\right) - \left(\frac{2}{5} + 0\right)$

❺ $\int_{0}^{1} (6e^{-3x} + 4)\, dx = \frac{6e^{-3x}}{-3} + 4x\Big|_0^1 = (-2e^{-3} + 4) - (-2e^{0} + 0)$

❻ $\int_{0}^{\pi/4} \sec x \tan x\, dx = \sec x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$

❼ $\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2}\, dx = 4\tan^{-1} x\Big|_{-1}^{1} = 4\tan^{-1} 1 - 4\tan^{-1} -1$

$= 4\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi$

❽ $\int_{0}^{1/2} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 4\sin^{-1} x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = 4\sin^{-1}\frac{1}{2} - 4\sin^{-1} 0 = 4\left(\frac{\pi}{6}\right) - 0$

❾ $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc x \cot x\, dx = -\csc x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\csc\frac{\pi}{2} - -\csc\frac{\pi}{4}$

$= -1 + \frac{2}{\sqrt{2}}$

❿ $\int_{0}^{2} (\frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}})\, dx = \int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^{3x}} - \frac{2e^{3x}}{e^{3x}}\, dx = \int_0^2 e^{-x} - 2\, dx$

$= \frac{e^{-x}}{-1} - 2x\Big|_0^2 = \left(\frac{-1}{e^2} - 4\right) - (-1 - 0)$

مدرس المادة : علاء بخيت

② في كل مما يلي أوجـد المساحة المعطاة :

1) المساحة فوق المحور X وتحت منحنى $y = 4 - x^2$

$4 - x^2 = 0$

$x = 2, -2$

$\int_{-2}^{2} 4 - x^2 dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{2} = (8 - \frac{8}{3}) - (-8 + \frac{8}{3}) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

$A = \frac{32}{3}$

2) المساحة تحت المحور X وفوق منحنى $y = x^2 - 4x$

$x^2 - 4x = 0$

$x = 0 \quad x = 4$

$\int_{0}^{4} x^2 - 4x \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} \Big|_{0}^{4} = \frac{64}{3} - 32 = -\frac{32}{3}$

$A = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3}$

3) مساحة المنطقة المحددة بين الدالة $y = x^2$ و $x = 2$ والمحور X

$x^2 = 0$

$x = 0$

$\int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3} - 0$

$A = \frac{8}{3}$

4) المساحة بين الدالة $y = \sin x$ والمحور X لكل $0 \le x \le \pi$

$\sin x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi$

$\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{0}^{\pi} = 1 - -1 = 2$

$A = 2$

5) المساحة بين الدالة $y = \sin x$ والمحور X لكل $-\pi/2 \le x \le \pi/4$

$\sin x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ministry of Education
Schools Operations Sectors
Emirates Educational 2 Council 5
Zayed educational complex (boys)

وزارة التربيـة والتعليم
قطاع العمليات المدرسية
مجلس الإمارات التعليمي 2 نطاق5
مجمع زايد التعليمي

اسم الطالب:.. الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

③ أوجـد المشتقة $f'(x)$ في كل مما يلي:

❶ $f(x) = \int_{2}^{x} (t^3 - 3t + 2)\, dt$ $f'(x) = x^3 - 3x + 2$

❷ $f(x) = \int_{x}^{2} \sec t\, dt = -\int_{2}^{x} \sec t\, dx \Rightarrow f'(x) = -\sec x$

❸ $f(x) = \int_{0}^{x^2} (e^{-t^2} + 1)\, dt$ $f'(x) = (e^{-(x^2)^2} + 1)(2x) = (e^{-x^4} + 1)(2x) - \cancel{(e^{0} + 1)(0)}$

❹ $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin(3t)\, dt$ $f'(x) = (\sin 3x^3)(3x^2) - (\sin(3x^2))\ 2x$

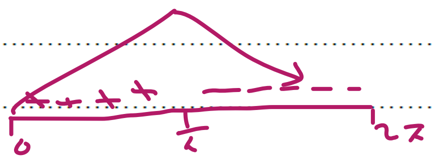
❺ $f(x) = \int_{e^x}^{2-x} \sin t^2\, dt$ $f'(x) = \sin(2-x)^2\,(-1) - (\sin(e^x)^2)(e^x)$

❻ $f(x) = \int_{3x}^{\sin x} (t^2 + 4)\, dt$ $f'(x) = (\sin^2 x + 4)(\cos x) - ((3x)^2 + 4)(3)$
$= \cos x(\sin^2 x + 4) - 3(9x^2 + 4)$

④ إذا كان معدّل تغيّر الماء في الخزان $f(t) = 10 \sin t$ لترات في الدقيقة
(a لكل $0 \le t \le 2\pi$ حدد متى يزداد مستوى الماء ومتى يتناقص
(b إذا كان في الخزان 100 لتر من الماء عند $t = 0$ ، حدد كم لتر يكون في الخزان عند $t = \pi$

الحجم $w(t)$
$w'(t) = 10 \sin t$

a) $10 \sin t = 0$
$t = 0,\ \pi,\ 2\pi$



$0 < t < \pi$ يزداد مستوى الماء ، $\pi < t < 2\pi$ يتناقص

b) $\int_{0}^{\pi} w'(t)\, dt = \int_{0}^{\pi} 10 \sin t\, dt$
$w(\pi) - w(0) = -10 \cos t \Big|_{0}^{\pi} = 10 - -10 = 20$
$w(\pi) - 100 = 20 \Rightarrow w(\pi) = 120$

مدرس المادة : علاء بخيت

اسم الطالب:..................................... الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

واجب

$y = m(x - x_0) + y_0$

⑤ في كل مما يأتي أوجـد معادلة المماس عند قيمة x المعطاة :

❶ $y = \int_{-1}^{x} \ln(t^2 + 2t + 2)\,dt \quad , \quad x = -1$

$y_0 = \int_{-1}^{-1} \ln(t^2 + 2t + 2)\,dt = 0$

$y' = \ln(x^2 + 2x + 2) \qquad m\Big|_{x=-1} = \ln((-1)^2 + 2(-1) + 2) = \ln 1 = 0$

$y = m(x - x_0) + y_0$

$y = 0(x - -1) + 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$

❷ $y = \int_{2}^{x} \cos(\pi t^3)\,dt \quad , \quad x = 2$

$y = \int_{2}^{2} \cos \pi t^3\,dt = 0$

$y' = \cos \pi x^3 \qquad m\Big|_{x=2} = \cos \pi (2)^3 = \cos 8\pi = 1$

$y = m(x - x_0) + y_0$

$y = 1(x - 2) + 0 \Rightarrow \quad y = x - 2$

❸ $y = \int_{0}^{x} e^{-t^2+1}\,dt \quad , \quad x = 0$

$y_0 = \int_{0}^{0} e^{-t^2+1}\,dt = 0$

$y' = e^{-x^2+1}$

$m = e^{0+1} = e$

$y = m(x - x_0) + y_0$

$y = e(x - 0) + 0$

$y = ex$

عوض

$\int_a^x (\quad)\,dt \Rightarrow y' = \boxed{\quad}$

دالة

$\int_0 (\quad)\,dt \Rightarrow y' =$ نعوض الدالة $\times$ مشتقة الدالة

دالة / دالة

$\int (\quad)\,dt =$ نعوض الحد العلوي $\times$ (مشتقة الحد العلوي) $-$ نعوض الحد السفلي $\times$ (مشتقة الحد السفلي)

مدرس المادة : علاء بخيت

⑤ استخدم النظرية الأساسية لحساب كل تكامل :

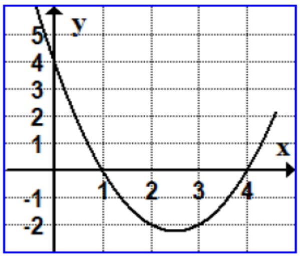
❶ $\int_0^2 (\sqrt{x}+1)^2\,dx = \int_0^2 x + 2\sqrt{x} + 1\,dx = \int_0^2 x + 2x^{\frac12} + 1\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}(2x^{\frac32}) + x \Big|_0^2 = 2 + \frac{4}{3}\sqrt{8} + 2$

❷ $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec x\,dx = \sec x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$

❸ $\int_1^4 \frac{x^2+4}{x^2}\,dx = \int_1^4 \frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}\,dx = \int_1^4 1 + 4x^{-2}\,dx = x + \frac{4x^{-1}}{-1} \Big|_1^4 = (4 - \frac{4}{4}) - (1 - \frac{1}{4})$

❹ $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sec^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$

❺ $\int_1^4 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx = \int_1^4 \frac{x^2+4-4}{x^2+4}\,dx = \int_1^4 \frac{x^2+4}{x^2+4} - \frac{4}{x^2+4}\,dx = \int_1^4 1 - \frac{4}{x^2+4}\,dx$
$= x - 4\tan^{-1}(\frac{x}{2}) \Big|_1^4$



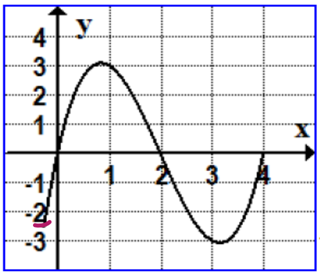
⑥ (a باستخدام التمثيل البياني للدالة f رتب التكاملات الآتية من الأصغر إلى الأكبر

$\int_0^4 f(x)\,dx$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx$ ، $\int_1^4 f(x)\,dx$ ، $\int_0^1 f(x)\,dx$

سالب تحت محور x

موجب فوق محور x

.... ، .... ، .... ، ....



(b الشكل المقابل تمثيل بياني لدالة f وبفرض أن $g(x) = \int_0^x f(t)\,dx$

1) أوجد $g'(3)$ .... $g'(x) = f(x) \Rightarrow g'(3) = f(3) = -3$

2) حدد النقاط الحرجة للدالة g .... 1 , 3

3) حدد الفترات التي تكون فيها الدالة g متزايدة .... $(-\infty, 1)$, $(3, 4)$

4) حدد الفترات التي تكون فيها الدالة g متناقصة .... $(1, 3)$

5) ما قيمة x التي عندها قيمة عظمى للدالة g .... $x = 1$

(c ابحث عن الأخطاء في التكامل

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = [-\frac{1}{x}]_{-1}^{1} = -1 - (1) = -2$$

....

مدرس المادة : علاء بخيت

⑦ أوجـد القيمة المتوسطة للدالة في الفترة المعطاة :

1) $f(x)=x^2-1 \quad , \quad [1,\ 3]$

$f_{avr}=\frac{1}{3-1}\int_1^3 (x^2-1)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-x\Big|_1^3\right)=\frac{1}{2}\left(6-\,-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{20}{3}\right)=\frac{10}{3}$

2) $f(x)=2x-x^2 \quad , \quad [0,\ 1]$

$f_{avr}=\frac{1}{1-0}\int_0^1 2x-x^2dx=1\int_0^1 2x-x^2\,dx=\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\left(1-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{2}{3}$

3) $f(x)=\cos x \quad , \quad [0,\ \pi/2]$

$f_{avr}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{2}{\pi}(1-0)=\frac{2}{\pi}$

4) $f(x)=e^x \quad , \quad [0,\ 2]$

$f_{avr}=\frac{1}{2-0}\int_0^2 e^x\,dx=\frac{1}{2}\left(e^x\Big|_0^2\right)=\frac{1}{2}\left(e^2-e^0\right)=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$

⑧ لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ;\ 0\le x\le 4 \\ x^3-x & ;\ x>4\end{cases}$ ، أوجـد $g(x)=\int_0^x f(t)\,dx$ لكل $x>0$ وهل $g'(x)=f(x)$

$g(x)=\int_0^x t^2+1\,dx=\frac{t^3}{3}+t\Big|_0^x=\frac{x^3}{3}+x \qquad 0\le x\le 4$

$g(x)=\int_0^4 f(t)dt+\int_4^x f(t)\,dt \qquad x>4$

$=\int_0^4 t^2+1\,dt+\int_4^x t^3-t\,dt$

$=\frac{t^3}{3}+t\Big|_0^4+\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}\Big|_4^x$

$=\left(\frac{64}{3}+4-0\right)+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-(64-8)$

$=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-\frac{92}{3}$

$g(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+x & 0<x\le 4\\ \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-\frac{92}{3} & x>4\end{cases}$

$g(x)$ غير متصل عند $x=4$

$g'(x)=\begin{cases}x^2+1 & 0<x<4\\ x^3-x & x>4\\ \text{غ.م} & x=4\end{cases}$

$g'(x)\neq f(x)$

مدرس المادة : علاء بخيت

$\int_a^a = 0$

⑧ باستخدام النظرية الأساسية حل التمارين الآتية:

❶ إذا كان $\int_6^{2x} f(t)\,dt = 2x^2 + bx - 6$ أوجـد قيمة b

$\frac{6}{2} = \frac{2x}{2}$, $x = 3$ $\Rightarrow$ $2(3)^2 + 3b - 6 = 0$

$\frac{12}{-3} = \frac{-3b}{-3} \Rightarrow \boxed{b = -4}$

❷ إذا كان $\int_3^{3x} f(t)\,dt = 2x^3 + 3x^2 + c$ أوجـد كل من : قيمة c ، $f'(3)$ ، $f(6)$

$3 = 3x$, $\boxed{x = 1}$ $\Rightarrow$ $2(1)^3 + 3(1)^2 + c = 0$

$5 + c = 0$

$\boxed{c = -5}$

باشتقاق الطرفين

$\Rightarrow f(3x) \cdot 3 = 6x^2 + 6x$

$x = 2$ نعوض $f(6) \cdot 3 = 6(2)^2 + 6(2) \Rightarrow f(6) = \frac{36}{3}$

$3 \cdot 3 f'(3x) = 12x + 6$

$\frac{9 f'(3)}{9} = \frac{12(1) + 6}{9} \Rightarrow f'(3) = 2$

❸ إذا كانت $y = x^2 + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + 1$ ، أوجـد : 1) $y(1)$ ، 2) $y'(1)$ ، 3) $y''(x)$

$y(1) = 1^2 + \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$

$y' = 2x + \frac{1}{x}$

$y'(1) = 2 + 1 = 3$

$y''(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

❹ إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}\int_3^x (2t - 3f'(t))\,dt$ ، أوجـد : 1) $f(3)$ ، 2) $f'(3)$

$f(3) = \frac{1}{3}\int_3^3 (2t - 3f'(t))\,dt = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}(2x - 3f'(x))$

$f'(3) = \frac{1}{3}(6 - 3f'(3))$

$f'(3) = 2 - f'(3)$

$2f'(3) = 2 \Rightarrow f'(3) = 1$

❺ إذا كان $y=\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt - 3x + 1$ أوجـد y'

$y' = \frac{1}{1+\tan^2 x}\cdot \sec^2 x - 3$

$= \frac{1}{\cancel{\sec^2 x}}\cdot \cancel{\sec^2 x} - 3 = 2$

❻ إذا كان $\int_1^{3x} f(t)\,dt = (2x-1)^3 + c$ ، أوجـد $f(9)$

$f(3x)(3) = 3(2x-1)^2(2)$

$3x = 9 \Rightarrow \boxed{x=3}$

$f(9)(3) = 3\times 25\times 2$

$f(9) = \frac{\cancel{3}\times 25\times 2}{\cancel{3}} = 50$

❼ إذا كان $\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{t}\,dt + y = x^2$ اثبت أن : $xy' = 2x^2 - 2$

نشتق الطرفين

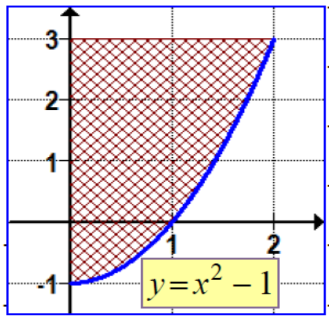
$\frac{1}{x}(1) - \frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot \frac{-1}{x^2} + y' = 2x$

$\frac{1}{x} + \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} + y' = 2x$

$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + y' = 2x\right) \cdot x$

$1 + 1 + y' = 2x^2 \Rightarrow y' = 2x^2 - 2$

❽ استخدم النظرية الأساسية في التفاضل و التكامل لحساب مساحة المنطقة المظللة في كل مما يأتي :



❾ بفرض أن $G(x)$, $F(x)$ دالتين أصليتين للدالة $f(x)$ ، وأن $\int_2^6 [F(x) - G(x)]\,dx = 12$ ،
أوجـد قيمة $\int_2^6 [xF(x) - xG(x)]\,dx$

الفرق بين دالتين أصليتين يساوي مقدار ثابت $F(x) - G(x) = c$

$\int_2^6 F(x) - G(x)\,dx = \int_2^6 c\,dx = 12 \Rightarrow c(6-2) = 12 \Rightarrow c = \frac{12}{4} = 3$

المطلوب $\int_2^6 x\,F(x) - xG(x)\,dx = \int_2^6 x\left(F(x) - G(x)\right)dx = \int_2^6 cx\,dx = \int_2^6 3x\,dx$

$= \frac{3x^2}{2}\Big|_2^6 = 54 - 6$

$= 48$

❽ إذا كان $H(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ ، $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$ أوجـد قيمة $H''(2)$

$H'(x) = f(x)$

$H''(x) = f'(x)$

$H''(2) = f'(2)$

$= \frac{3}{4\sqrt{5}}$

$f'(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{t}$

$f''(t) = \frac{t\left(\frac{\cancel{2}(2t)}{\cancel{2}\sqrt{1+t^2}}\right) - \sqrt{1+t^2}}{t^2}$

$f'(2) = \frac{2\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{5}}{4}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{8-5}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{4\sqrt{5}}$

$\int (x^2+5x)^5 dx =$ $(2x+5)$

التكامل بالتعويض

نلجأ الى التكامل بالتعويض عند وجود قوس مرفوع لأس يصعب إيجاد مفكوكة أو عند وجود حاصل ضرب دالتين إحداهما مرفوع لأس والأخرى مشتقة الأولى (أو يمكن جعلها مشتقة الأولى بعد ضربها بعدد ثابت)

مثل ❸ $\int (2+\sin x)^6 \cos x\, dx$ ❷ $\int (\frac{2}{x}-4)^6 \frac{1}{x^2} dx$ ❶ $\int (x^2+3)^6 x\, dx$

❻ $\int x^2 \cos(x^3+\pi)\, dx$ ❺ $\int x^2 e^{(x^3+6)}\, dx$ ❹ $\int (e+\ln x)^6 \frac{1}{x} dx$

وبصورة عامة : إذا كان التكامل على الصورة $\int f[g(x)]\cdot g'(x)\, dx$ أو $\int [g(x)]^n \cdot g'(x)\, dx$

نتبع الخطوات التالية :

1) نفرض أن $u=g(x)$

2) نوجد المشتقة $\frac{du}{dx}=g'(x)$ فيكون $du=g'(x)dx$ أو $dx=\frac{du}{u'}$

3) نعوض عن $g(x)$ بـ u وعن dx بقيمتها ونجري الاختصارات اللازمة ليصبح التكامل بدلالة u و du فقط

4) ننجز التكامل باستخدام القواعد التي سبق دراستها و بعد الانتهاء نستبدل كل u بـ $g(x)$ ليصبح التكامل بدلالة x

وتذكر أن : $\int (x+b)^n dx = \frac{(x+b)^{n+1}}{(n+1)} + c$

تدريب استخدم التعويض المعطى لإيجـاد التكامل غير المحدود :

نرمز / لعوالد

❶ $\int x^2(x^3+1)^4 dx$, $u=x^3+1$ نفرض

$du = 3x^2 dx$

$dx = \frac{du}{3x^2}$

$\int \cancel{x^2} u^4 \frac{du}{3\cancel{x^2}} = \int \frac{1}{3} u^4 du$

$= \frac{1}{3}\frac{u^5}{5} + c$

$= \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + c$

❷ $\int x\sqrt{x^2+3}\, dx$, $u=x^2+3$

نرمز / يستويه

$du = 2x\, dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$\int \cancel{x}\, u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2\cancel{x}}$

$\int \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}$

نرمز / لعوالد

❸ $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}} dx$, $u = \sqrt{x}+1$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$dx = 2\sqrt{x}\, du$

$\int \frac{u^3}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}}\, du$

$= \int 2u^3 du$

$\frac{2}{4}u^4 + c$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{x}+1)^4 + c$

تعويض

$\int (\quad)(\quad)$ مشتق

$\int (\quad)\sqrt{\quad}$ نرمز

زاوية غطية مشتقها بالخارج / تعويض

تمـــارين

أولاً : أوجــد كلاً من التكاملات غير المحدودة الآتية :

1) $\int t^2 \cos t^3 \, dt$

$u = t^3$

$du = 3t^2 \, dt$

$dt = \frac{du}{3t^2}$

$\int \cancel{t^2} \cos u \frac{du}{3\cancel{t^2}}$

$\int \frac{1}{3} \cos u \, du = \frac{1}{3} \sin u + c$

$= \frac{1}{3} \sin t^3 + c$

2) $\int \sin t \, (\cos t + 3)^{3/4} dt$

$u = \cos t + 3$

$du = -\sin t \, dt$

$dt = \frac{du}{-\sin t}$

$\int \cancel{\sin t} \, u^{\frac{3}{4}} \frac{du}{-\cancel{\sin t}}$

$= -\frac{4}{7} u^{\frac{7}{4}} + c = \frac{-4}{7} (\cos t + 3)^{\frac{7}{4}} + c$

3) $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2} dx$

مشتقة $\frac{a}{x^n} \Rightarrow -\frac{an}{x^{n+1}}$

زاوية غ خطية / تعويض

$u = \frac{1}{x}$

$du = \frac{-1}{x^2} dx$

$dx = -x^2 \, du$

$\int \frac{\cos u}{\cancel{x^2}} (-\cancel{x^2} du)$

$\int -\cos u \, du = -\sin u + c = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + c$

4) $\int e^x \sqrt{e^x + 4} \, dx$

غ. خطي / تعويض

$u = e^x + 4$

$du = e^x \, dx$

$dx = \frac{du}{e^x}$

$\int \cancel{e^x} u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\cancel{e^x}}$

$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (e^x + 4)^{\frac{3}{2}} + c$

5) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

الأس جزئي / تعويض

$e^{(\text{جزئي})}$

جزئي / تعويض

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$dx = 2\sqrt{x} \, du$

$\int \frac{e^u}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}} \, du$

$\int 2e^u \, du$

$2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$

أوجـد كلاً من التكاملات غير المحدودة الآتية :

6) $\int \frac{v^2}{v^3+4}\,dv$

$3v^2$

$\frac{1}{3}\int \frac{3v^2}{v^3+4}\,dv = \frac{1}{3}\ln|v^3+4| + c$

أو باستخدام التعويض

$u = v^3 + 4$

① فرض ② اشتقاق ③ نحصل dx ④ نعوض داخل التكامل ⑤ اختصار ⑥ نعوض
⑦ نرجع الفرض.

7) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\,dx$

$u = 2 + \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$dx = x\,du$

$\int \frac{\sqrt{u}}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\,du$

$\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(2+\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{u}\,(2+\sqrt{u})}\,du$

$v = 2 + \sqrt{u}$

$dv = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$

$2\sqrt{u}\,dv = du$

$\int \frac{1}{\cancel{\sqrt{u}}\,v}\cdot 2\cancel{\sqrt{u}}\,dv$

$\int \frac{2}{v}\,dv = 2\ln v + c$

$= 2\ln(2+\sqrt{u}) + c$

9) $\int \tan 2x\,dx$

$\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

$-2\sin 2x$

10) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$

$2x$

أوجـد كلاً من التكاملات غير المحدودة الآتية :

11) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$u = 1 - x^4$
$du = -4x^3\,dx$
$dx = \frac{du}{-4x^3}$

$\int \frac{\cancel{x^3}}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{du}{-4\cancel{x^3}}$

$\int -\frac{1}{4} u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{4} \cdot 2u^{\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{2}(1-x^4)^{\frac{1}{2}} + c$

12) $\int \frac{x^3+x}{1+x^4}dx = \int \frac{x^3}{1+x^4}dx + \int \frac{x}{1+(x^2)^2}dx$

$u = 1+x^4$
$du = 4x^3\,dx$
$dx = \frac{du}{4x^3}$

$v = x^2$
$dv = 2x\,dx$
$dx = \frac{dv}{2x}$

$= \int \frac{\cancel{x^3}}{u} \cdot \frac{du}{-4\cancel{x^3}} + \int \frac{\cancel{x}}{1+v^2} \cdot \frac{dv}{2\cancel{x}}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+v^2}dv = -\frac{1}{4}\ln u + \tan^{-1} v + c$

$= -\frac{1}{4}\ln(1+x^4) + \tan^{-1} x^2 + c$

13) $\int \frac{4}{x(\ln x - 1)^2}dx$

$u = \ln x - 1$
$du = \frac{1}{x}dx$
$dx = x\,du$

$\int \frac{4}{\cancel{x}u^2} \cdot \cancel{x}\,du$

$\int 4u^{-2}du = \frac{4u^{-1}}{-1} + c = \frac{-4}{\ln x - 1} + c$

14) $\int \frac{(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$u = \sin^{-1}x$
$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$dx = \sqrt{1-x^2}\,du$

$\int \frac{u^3}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1-x^2}}\,du$

$\frac{u^4}{4} + c = \frac{(\sin^{-1}x)^4}{4} + c$

15) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx$

$u = x^2$
$du = 2x\,dx$
$dx = \frac{du}{2x}$

$\int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}}$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{1}{2}\sin^{-1}u + c$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}x^2 + c$

اسم الطالب:.. الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

أوجـد كلاً من التكاملات غير المحدودة الآتية :

16) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}dx$

$u = x^3$

$du = 3x^2\,dx$

$dx = \frac{du}{3x^2}$

$\int \frac{\cancel{x^2}}{1+u^2}\cdot\frac{du}{\cancel{3x^2}}$

$\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{3}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{3}\tan^{-1}x^3 + c$

وزاري 17) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}dx$

$u = x^{3/2} \Rightarrow$ $u = \sqrt{x^3}$, $u^2 = x^3$

$du = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$

$dx = \frac{2du}{3x^{\frac{1}{2}}}$

$\int \frac{\cancel{3}\cancel{\sqrt{x}}}{1+x^3}\cdot\frac{2du}{\cancel{3}\cancel{\sqrt{x}}}$

$\int \frac{2}{1+u^2}du = 2\tan^{-1}u + c$

$= 2\tan^{-1}x^{3/2} + c$

18) $\int \frac{x\sqrt{x}}{1+x^5}dx$

$u = x^{5/2}$

$u = \sqrt{x^5}$

$u^2 = x^5$

$2u\,du = 5x^4\,dx$

$dx = \frac{2u}{5x^4}du$

$\int \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{1+x^5}\cdot\frac{2u}{5x^{\cancel{4}3}}du$

$\int \frac{\sqrt{x}}{1+u^2}\cdot\frac{2u}{5x^3}du$

$\int \frac{x^{-5/2}}{1+u^2}\cdot\frac{2u}{5}du$

$\int \frac{2u}{5(1+u^2)}\cdot\frac{du}{x^{5/2}}$

$\int \frac{2\cancel{u}}{5(1+u^2)}\frac{du}{\cancel{u}} = \frac{2}{5}\tan^{-1}u + c$

19) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+3}}dx$ مهم

$u = x+3$

$du = dx$

$x = u-3$

$x^2 = (u-3)^2$

$x^2 = u^2 - 6u + 9$

$\int \frac{x^2}{u^{\frac{1}{3}}}\cdot du$

$\int \frac{u^2-6u+9}{u^{\frac{1}{3}}}du$

$\int \frac{u^2}{u^{\frac{1}{3}}} - \frac{6u}{u^{\frac{1}{3}}} + \frac{9}{u^{\frac{1}{3}}}du$

$= \int u^{\frac{5}{3}} - 6u^{\frac{2}{3}} + 9u^{-\frac{1}{3}}du$

$= \frac{3}{8}u^{8/3} - 6(\frac{3}{5})u^{5/3} + 9(\frac{3}{2})u^{\frac{2}{3}} + c$

$= \frac{3}{8}(x+3)^{8/3} - \frac{18}{5}(x+3)^{5/3} + \frac{27}{2}(x+3)^{\frac{2}{3}} + c$

مدرس المادة : علاء بخيت

$x^2 = 4 - u$

أوجـد كلاً من التكاملات غير المحدودة الآتية :

تجزئ جبري / تعويض

20) $\int x^3\sqrt{4 - x^2}\,dx$

$u = 4 - x^2$
$du = -2x\,dx$
$dx = \frac{du}{-2x}$

$\int x^2 x\, u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{-2x}$
$\int -\frac{1}{2} x^2 u^{\frac{1}{2}}\,du$
$\int -\frac{1}{2}(4 - u) u^{\frac{1}{2}}\,du$

$\int -2u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u^{3/2}\,du$
$= -2\frac{u^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{2}\frac{u^{5/2}}{5/2} + c$
$= -2\left(\frac{2}{3}\right)(4 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)(4 - x^2)^{5/2} + c$

21) $\int \sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x} + 1}\,dx$

$u = \sqrt{x}$
$u^2 = x$
$2u\,du = dx$
$\int u\sqrt{u^2 \cdot u + 1}\;2u\,du$

$\int 2u^2\sqrt{u^3 + 1}\,du$
$v = u^3 + 1$
$dv = 3u^2\,du$
$du = \frac{dv}{3u^2}$

$\int 2u^2 v^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{3u^2}$
$\int \frac{2}{3} v^{\frac{1}{2}}\,dv$
$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right) v^{3/2} + c$
$= \frac{4}{9}(u^3 + 1) + c$
$= \frac{4}{9}\left((\sqrt{x})^3 + 1\right) + c$

واجب 22) $\int \sqrt{\frac{x - 1}{x^5}}\,dx$

23) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 - 1}}\,dx$

$\int \frac{1}{x\sqrt{(x^2)^2 - 1}}$
$u = x^2$
$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$
$\int \frac{1}{x\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{2x}$

$\int \frac{1}{2x^2\sqrt{u^2 - 1}}\,du$
$\int \frac{1}{2u\sqrt{u^2 - 1}}\,du = \frac{1}{2}\sec^{-1} u - 1$
$= \frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2 - 1) + c$

24) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{x}}}\,dx$

$u = \sqrt{x}$
$u^2 = x$
$2u\,du = dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u}} \cdot 2u\,du$
$\int \frac{2u}{\sqrt{1 - u}}\,du$

$v = 1 - u \Rightarrow u = 1 - v$
$dv = -du \Rightarrow du = -dv$
$\int \frac{2(1 - v)}{v} \cdot -dv$
$\int -\frac{2}{v} + 2\,dv$
$= -2\ln v + 2v + c$
$= -2\ln(1 - u) + 2(1 - u) + c$
$= -2\ln(1 - \sqrt{x}) + 2(1 - \sqrt{x}) + c$

مدرس المادة : علاء بخيت

ثانيـاً :أوجـد قيمة كل من التكاملات المحدودة الآتية :

1) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$u = x^2+1$; $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=2 \Rightarrow u=5$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$\int_1^5 \cancel{x}\sqrt{u} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}}$

$\int_1^5 \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}u^{3/2}\Big|_1^5$

$= \frac{1}{3}\cdot 5^{3/2} - \frac{1}{2}\cdot 1^{3/2} = \frac{\sqrt{125}}{3} - \frac{1}{2}$

2) $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\left(2-\frac{3}{x}\right)^3 dx$

$u = 2-\frac{3}{x}$; $x=1 \quad u=-1$; $x=3 \quad u=1$

$du = \frac{3}{x^2}\,dx$

$dx = \frac{x^2}{3}\,du$

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\cancel{x^2}} u^3 \cdot \frac{\cancel{x^2}}{3}\,du$

$\frac{u^4}{12}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$

3) $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

$\int_0^2 \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx$

$u = e^x$; $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=2 \Rightarrow u=e^2$

$du = e^x\,dx$

$dx = \frac{du}{e^x}$

$\int_1^{e^2} \frac{\cancel{e^x}}{1+u^2}\cdot\frac{du}{\cancel{e^x}}$

$\int_1^{e^2} \frac{1}{1+u^2}\,du = \tan^{-1}u\Big|_1^{e^2}$

$= \tan^{-1}e^2 - \tan^{-1}1$

4) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$dx = x\,du$

$x=1 \quad u=\ln 1=0$

$x=e \quad u=\ln e=1$

$\int_0^1 \frac{u}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,du$

$\int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

أوجـد قيمة كل من التكاملات المحدودة الآتية :

5) $\int_1^3 x\sin(\pi x^2)\,dx$

$u = \pi x^2$, $du = 2\pi x\,dx$, $dx = \frac{du}{2\pi x}$

$x=1 \quad u=\pi$
$x=3 \quad u=9\pi$

$\int_{\pi}^{9\pi} \cancel{x} \sin u \cdot \frac{du}{2\pi \cancel{x}}$

$\int_{\pi}^{9\pi} \frac{1}{2\pi} \sin u \, du$

$= \frac{-1}{2\pi} \cos u \Big|_{\pi}^{9\pi}$

$= \frac{-1}{2\pi}(-1) - \frac{-1}{2\pi}(-1) = 0$

$= \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} = 0$

6) $\int_{-1}^{1} x\, e^{-x^2}\,dx$

$u = -x^2$, $du = -2x\,dx$, $dx = \frac{du}{-2x}$

$x=1 \quad u=-1$
$x=-1 \quad u=-1$

$\int_{1}^{-1} x e^{u} \cdot \frac{du}{-2\cancel{x}}$

$\int_{1}^{-1} -\frac{1}{2} e^{u}\, du$

$= -\frac{1}{2} e^{u} \Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}e - -\frac{1}{2}e^{-1}$

7) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\, dx$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

واجب
$\int \sec x\, dx$
$\int \csc x\, dx$

8) $\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

$u = x^2+1 \Rightarrow x^2 = u-1$

$du = 2x\,dx$, $\frac{du}{2x} = \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$x=0 \quad u=1$
$x=2 \quad u=5$

$\int_1^5 \frac{\cancel{4}^{2} \cancel{x^3}^{2}}{u^2} \cdot \frac{du}{\cancel{2x}}$

$\int_1^5 2x^2 u^{-2}\, du$

$\int_1^5 2(u-1)u^{-2}\, du$

$\int_1^5 2u^{-1} - 2u^{-2}\, du$

$\int_1^5 \frac{2}{u} - 2u^{-2}\, du$

$= 2\ln u - \frac{2u^{-1}}{-1} \Big|_1^5$

$= (2\ln 5 + 2(5^{-1})) - (2\ln 1 - 2(1^{-1}))$

$= 2\ln 5 + \frac{2}{5} + 2$

مدرس المادة : علاء بخيت

$f(x) = f(u) = f(y) = f(z)$

تمـارين

❶ يفرض أن $\int_0^4 f(x)\,dx = 8$ أوجد قيمة التكامل $\int_{-2}^{0} x\, f(x^2)\, dx$

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$x = 0 \quad u = 0$

$x = -2 \quad u = 4$

$\int_4^0 \cancel{x} f(u) \cdot \frac{du}{2\cancel{x}}$

$\frac{1}{2}\int_4^0 f(u)\,du = \frac{1}{2}(-8) = -4$

❷ يفرض أن $\int_1^4 f(x)\, dx = 6$ أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 f(3x+1)\, dx$

$u = 3x+1$

$du = 3\,dx$

$dx = \frac{du}{3}$

$x = 1 \quad u = 4$

$x = 0 \quad u = 1$

$\int_1^4 f(u)\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_1^4 f(u)\,du = \frac{1}{3}(6) = 2$

❸ استخدم التعويض $u = x^{1/6}$ لإيجاد التكامل :

a) $\int \frac{1}{x^{5/6} + x^{2/3}}\,dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx$

❹ بفرض أن A_1 المساحة بين الدالة $y = \pi x - x^2$ والمحور X لكل $0 \le x \le 1$

و A_2 المساحة بين الدالة $y = (\pi \cos x - \cos^2 x)\sin x$ والمحور X لكل $0 \le x \le \pi/2$

أثبت أن المساحتين متساويتين $A_1 = A_2$

....
....
....
....
....
....

❺ أعجب عوضين بطريقة التكامل بالتعويض فاستخدمها لإيجاد التكامل $\int_{-2}^{1} 4x^4\,dx$ وذلك بوضعه على الصورة $\int_{-2}^{1} x(4x^3)\,dx$ ، استخدم التعويض $u = x^4$ مع $du = 4x^3\,dx$ وأنجز التكامل كما يلي :

$$\int_{-2}^{1} x(4x^3)\,dx = \int_{16}^{1} u^{1/4}\,du = [4/5\,u^{5/4}]_{16}^{1} = \frac{4}{5} - \frac{32}{5} = -\frac{28}{5}$$

فكانت الإجابة غير مقبولة ، والسؤال لماذا الإجابة غير مقبولة وما هي الأخطاء في حساباته ؟

....
....
....
....
....
....

❻ لتكن $f(t) = \begin{cases} 1 & ; -2 \le t < -1 \\ t & ; -1 \le t \le 1 \\ -1 & ; 1 < t \le 2 \end{cases}$ ، أوجـد جذر متوسط التربيع $rms = \sqrt{1/4\int_{-2}^{2} f^2(t)\,dt}$

....
....
....
....

❼ لكل $x>0$ أثبت أن $\int_a^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \int_1^{1/a} \frac{1}{x^2+1}dx$

واستخدم هذه المعادلة لإثبات المتطابقة $\tan^{-1} a + \tan^{-1} 1/a = \pi/2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

❽ a) أوجد التكامل $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx$ بإعادة كتابة المكامل بالصيغة $\frac{1}{x^2\sqrt{1-1/x^2}}$ وإجراء التعويض $u=1/x$

b) استخدم إجابتك واستنتج العلاقة بين $\sec^{-1} x$ و $\sin^{-1} x$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6

التكامل العددي

بعض الدوال يصعب إيجاد قيمة تكاملاتها بالطرق التحليلية (لعدم وجود دالة أصلية) مثل $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$
فنلجأ إلى تقريب قيمة التكامل عددياً (التكامل العددي) وفيما يلي ثلاث طرق للتكامل العددي :

طريقة قاعدة نقطة المنتصف

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x}$$

حيث $C_i = \frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$ نقطة منتصف الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$

مثال 1 أوجـد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 3x^2\,dx$ باستخدام قاعدة نقطة المنتصف مع $n = 4$

الحل

$\Delta x = \frac{1}{4}$ ، نقاط تجزئة الفترة $[0 , 1]$ هي $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1$

ونقاط المنتصف هي $C_1 = 1/8$, $C_2 = 3/8$, $C_3 = 5/8$, $C_4 = 7/8$ **وتكون مجاميع ريمان**

$$[f(1/8) + f(3/8) + f(5/8) + f(7/8)](1/4) = 0.984375$$

M المنتصف : $\frac{b-a}{n}\left(f(c_1) + f(c_2) + ---- + f(c_n)\right)$

طريقة قاعدة شبه المنحرف $T_n(f)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

مثال 2 أوجـد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 3x^2\,dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف مع $n = 4$

الحل

$\Delta x = \frac{1}{4}$ ، نقاط تجزئة الفترة $[0 , 1]$ هي $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1$

$$T_4(f) = \frac{1-0}{2(4)}[f(0) + 2f(1/4) + 2f(1/2) + 2f(3/4) + f(1)]$$
$$= \frac{1}{8}[\,0 + 3/8 + 12/8) + 27/8) + 3\,] = 1.03125$$

طريقة قاعدة سيمبسون $S_n(f)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots\ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

مثال 3 أوجـد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 3x^2\,dx$ باستخدام قاعدة سيمبسون مع $n = 4$

الحل

$\Delta x = \frac{1}{4}$ ، نقاط تجزئة الفترة $[0 , 1]$ هي $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1$

$$S_4(f) = \frac{1-0}{3(4)}[f(0) + 4f(1/4) + 2f(1/2) + 4f(3/4) + f(1)]$$
$$= \frac{1}{12}[\,0 + 3/4 + 12/8) + 27/4) + 3\,] = 1.$$

x	$f(x)$
0.0	1.0
0.25	0.8
0.5	1.3
0.75	1.1
1.0	1.6

مثال 4 استخدم قاعدة سيمبسون و البيانات المعطاة في الجدول لتقدير قيمة $\int_0^1 f(x)\,dx$

الحل: مع $n=4$ تكون $\Delta x = \frac{1}{4}$ ، والتجزئة هي $x_0=0\,,\ x_1=1/4\,,\ x_2=1/2\,,\ x_3=3/4\,,\ x_4=1$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{3(4)}\left[f(0)+4f(0.25)+2f(0.5)+4f(0.75)+f(1)\right]$$

$$=\frac{1}{12}\left[1+4(0.8)+2(1.3)+4(1.1)+1.6\right]=1.066667$$

نظرية (1) بفرض أن f'' دالة متصلة على $[a\,,b]$ وأن $|f''(x)|\le k$ لكل x في $[a\,,b]$ فيكون

$$\text{(i)}\quad |ET_n|\le k\frac{(b-a)^3}{12n^2}\qquad / \qquad \text{(ii)}\quad |EM_n|\le k\frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

K القيمة المتعلقة بالمشتقة الثانية:

نظرية (2) بفرض أن $f^{(4)}$ دالة متصلة على $[a\,,b]$ وأن $|f^{(4)}(x)|\le L$ لكل x في $[a\,,b]$ فيكون

$$|ES_n|\le L\frac{(b-a)^5}{180n^4}$$

L القيمة المتعلقة بالمشتقة الرابعة:

مثال 5 أوجـد حدود الخطأ في تقريب قيمة التكامل $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$ مع $n=10$ باستخدام

a) قاعدة نقطة المنتصف
b) قاعدة شبه المنحرف
c) قاعدة سيمبسون

الحل: للدالة $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ نوجد المشتقات $[0\ ,\ 1]$

$$f'(x)=-x^{-2}\ ,\quad f''(x)=2x^{-3}\ ,\quad f'''(x)=-6x^{-4}\ ,\quad f^{(4)}(x)=24x^{-5}$$

لاحظ أن $1\le x\le 3$ (المقام ≤ 1) ☜ $|f''(x)|=|2x^{-3}|=\frac{2}{x^3}\le 2$

وحسب النظرية (1) نجد أن :

$$|EM_{10}|\le k\frac{(b-a)^3}{24n^2}=2\frac{(3-1)^3}{24(10)^2}\approx 0.0066667$$

وبالمثل حسب النظرية (1) نجد أن :

$$|ET_{10}|\le k\frac{(b-a)^3}{12n^2}=2\frac{(3-1)^3}{12(10)^2}\approx 0.013333$$

$$|f^{(4)}(x)|=|24x^{-5}|=\frac{24}{x^5}\le 24$$

وحسب النظرية (2) نجد أن :

$$|ES_{10}|\le L\frac{(b-a)^5}{180n^4}=24\frac{(3-1)^5}{180(10)^4}\approx 0.000427$$

تحديد عدد الخطوات التي تضمن دقة معطاة

مثال 6 حدد عدد الخطوات التي تضمن دقة **على الأقل** 10^{-7} لاستخدام كل من قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سيمبسون لتقريب التكامل $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$ في المثال 5

الحل من المثال السابق لدينا

$$\left|ET_n\right| \le k\frac{(b-a)^3}{12n^2} = 2\frac{(3-1)^3}{12n^2} = \frac{4}{3n^2}$$

وللحصول على الدقة المطلوبة لغاية 10^{-7} يجب أن تتحقق المتباينة $\left|ET_n\right| \le \frac{4}{3n^2} \le 10^{-7}$

نحل المتباينة من أجل n^2 فنجد :

$$\frac{4}{3n^2} \le \frac{1}{10^7} \Rightarrow 4(10^7) \le 3n^2 \Rightarrow n^2 \ge \frac{4}{3}(10^7)$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد $n \ge \sqrt{\frac{4}{3}(10^7)} \approx 3651.48$

وبالتالي أي قيمة $n \ge 3652$ ستعطي الدقة المطلوبة هذا بالنسبة لقاعدة شبه المنحرف

أما بالنسبة لقاعدة سمبسون لدينا

$$\left|ES_n\right| \le L\frac{(b-a)^5}{180n^4} = 24\frac{(3-1)^5}{180n^4} = \frac{64}{15n^4}$$

وللحصول على الدقة المطلوبة لغاية 10^{-7} يجب أن تتحقق المتباينة $\left|ES_n\right| \le \frac{64}{15n^4} \le 10^{-7}$

نحل المتباينة من أجل n^2 فنجد :

$$\frac{64}{15n^4} \le \frac{1}{10^7} \Rightarrow 64(10^7) \le 15n^4 \Rightarrow n^4 \ge \frac{64}{15}(10^7)$$

وبأخذ الجذر الرابع للطرفين نجد $n \ge \sqrt[4]{\frac{64}{15}(10^7)} \approx 80.8$

وبالتالي أي قيمة $n \ge 82$ ستعطي الدقة المطلوبة (في قاعدة سمبسون يجب أن يكون n عدد زوجي)

تمـارين

❶ أوجـد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ حيث $n=4$ باستخدام :

a) قاعدة نقطة المنتصف   b) قاعدة شبه المنحرف   c) قاعدة سيمبسون

a) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

$[0,\frac{1}{4}], [\frac{1}{4},\frac{1}{2}], [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\ [\frac{3}{4},1]$

$c_1 = \frac{1}{8}$ $c_2 = \frac{3}{8}$ $c_3 = \frac{5}{8}$ $c_4 = \frac{7}{8}$

$$\int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left(f(\tfrac{1}{8}) + f(\tfrac{3}{8}) + f(\tfrac{5}{8}) + f(\tfrac{7}{8})\right) * \frac{1}{4}$$

$$= \left(\frac{65}{64} + \frac{73}{64} + \frac{89}{64} + \frac{113}{64}\right) * \frac{1}{4} = \frac{85}{64} \approx 1.3$$

b) x_0 x_1 x_2 x_3 x_4

$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$

$$T_{4n} = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2f(x) + 2f(x_3) + f(x_4)\right)$$

$$= \frac{1-0}{2(4)}\left(f(0) + 2f(\tfrac{1}{4}) + 2f(\tfrac{1}{2}) + 2f(\tfrac{3}{4}) + f(1)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{17}{8} + \frac{5}{2} + \frac{25}{8} + 2\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{43}{4}\right) = 1.34$$

c) $$S_{4n} = \frac{b-a}{3n}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)$$

$$= \frac{1-0}{3(4)}\left(f(0) + 4f(\tfrac{1}{4}) + 2f(\tfrac{1}{2}) + 4f(\tfrac{3}{4}) + f(1)\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{17}{4} + \frac{5}{2} + \frac{25}{4} + 2\right) = 1.333...$$

$a=-1$ $n=4$
$b=1$

❷ أوجـد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{-1}^{1}(2x-x^2)\,dx$ $= -2/3$ حيث $\boxed{n=4}$ باستخدام :

a) قاعدة نقطة المنتصف b) قاعدة شبه المنحرف c) قاعدة سيمبسون

a) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1--1}{4} = \frac{1}{2}$

$[-1, -\frac{1}{2}]$ $[-\frac{1}{2}, 0]$ $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$

$c_1 = -\frac{3}{4}$ $c_2 = -\frac{1}{4}$ $c_3 = \frac{1}{4}$ $c_4 = \frac{3}{4}$

$$\int_{-1}^{1}(2x-x^2)\,dx = \frac{1--1}{4}\left(f(-\tfrac{3}{4}) + f(-\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{3}{4})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-33}{16} + \frac{-9}{16} + \frac{7}{16} + \frac{15}{16}\right) = -0.625$$

b) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-1}{4} = \frac{1}{2}$

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4
$-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ عدد الفترات $+1 = 4+1 = 5$ عدد العناصر

صيغة الحفظ $T_4 = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\right)$

$$= \frac{1--1}{2(4)}\left(f(-1) + 2f(-\tfrac{1}{2}) + 2f(0) + 2f(\tfrac{1}{2}) + f(1)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-3 + 2(-\tfrac{5}{4}) + 2(0) + 2(\tfrac{3}{4}) + 1\right) = -0.75$$

$$S_4 = \frac{b-a}{3n}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_5)\right)$$

$$= \frac{1--1}{3(4)}\left(f(-1) + 4f(-\tfrac{1}{2}) + 2f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}) + f(1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(-3 + 4(-\tfrac{5}{4}) + 2(0) + 4(\tfrac{3}{4}) + 1\right) = \frac{1}{6} \times -4 = -0.6$$

$n=8$

$= 9$ عدد النقاط

❸ استخدم : a) قاعدة شبه المنحرف و b) قاعدة سيمبسون

لتقدير قيمة التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ من البيانات المعطاة .

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0
$f(x)$	4.0	4.6	5.2	4.8	5.0	4.6	4.4	3.8	4.0

$$T_8 = \frac{2-0}{2(8)}\Big(f(0)+2f(0.25)+2f(0.5)+2f(0.75)+2f(1)+2f(1.25)+2f(1.5)+2f(1.75)+f(2)\Big)$$

$$= \frac{1}{8}(4+9.2+10.4+9.6+10+9.2+8.8+7.6+4)$$

$$= 9.1$$

$$S_8 = \frac{2-0}{3(8)}\Big(f(0)+4f(0.25)+2f(0.5)+4f(0.75)+2f(1)+4f(1.25)+2f(1.5)+4f(1.75)+f(2)\Big)$$

$$= \frac{1}{12}(4+18.4+10.4+19.2+10+18.4+8.8+15.2+4)$$

$$= 9.03 \checkmark$$

❹ قرب القيمة $\ln 4 = \int_1^4 \frac{1}{x}\, dx$ باستخدام $a)$ قاعدة نقطة المنتصف ، $b)$ قاعدة شبه المنحرف

$c)$ قاعدة سيمبسون مع $n = 4$ وحدد إذا كان كل تقريب صغير للغاية أم كبير للغاية

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

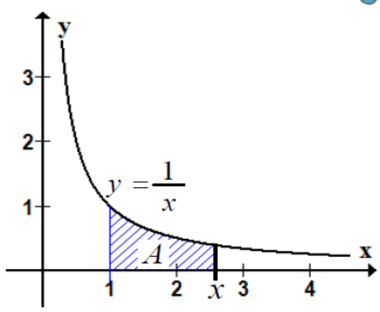
....

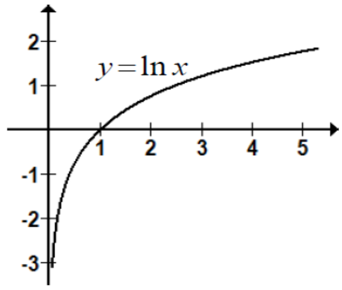
....

اسم الطالب:.. الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) الفصل الدراسي الثاني

$\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c}$

اللوغاريتم الطبيعي كتكامل





تعريف : دالة اللوغاريتم الطبيعي هي دالة اللوغاريتم للأساس e

وهي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ أي أن $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$

وتعلم أن مجال الدالة $f(x)=\ln x$ هو $(0,\infty)$

كما أنه لكل $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{1}{x}>0$ و $f''(x)=\frac{1}{x}<0$

وهذا يعني أن الدالة متزايدة في مجالها وتمثيلها البياني مقعر للأسفل

وكذلك $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ / $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

نظرية (1)

لأي أعداد حقيقية $a>0$, $b>0$ وأي عدد نسبي r يكون

i) $\ln 1 = 0$ و $\ln e = 1$ / ii) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

iii) $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ / iv) $\ln(a^r) = r\ln a$

تدريب

استخدم خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة التعبير كحد واحد :

❶ $\ln 8 - 2\ln 2 = \ln 8 - \ln 2^2 = \ln \frac{8}{4} = \ln 2$

❷ $3\ln 3 - \ln 9 + \ln 3 = \ln 3^3 - \ln 9 + \ln 3 = \ln(\frac{3^3}{9}\cdot 3) = \ln 9$

❸ $2\ln(1/3) - \ln 3 + \ln(1/9) = \ln(\frac{1}{3})^2 - \ln 3 + \ln\frac{1}{9} = \ln((\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}) = \ln\frac{1}{243}$

وقد تعرفنا سابقاً على اشتقاق الدوال اللوغاريتمية

$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$; $f(x)\neq 0$ / $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$; $x\neq 0$

تدريب

أوجد المشتقة باستخدام خصائص اللوغاريتمات عند الحاجة

❶ $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x^2+1}) = \frac{d}{dx}\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \frac{2x}{2(x^2+1)}$

❷ $\frac{d}{dx}[\ln(x^5 \sin x \cos x)] = \frac{d}{dx}(\ln x^5 + \ln \sin x + \ln \cos x)$

$= \frac{5x^4}{x^5} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{5}{x} + \cot x - \tan x$

❸ $\frac{d}{dx}(\ln\frac{x^4}{x^5+1}) = \frac{d}{dx}(\ln x^4 - \ln(x^5+1))$

$= \frac{4x^3}{x^4} - \frac{5x^4}{x^5+1} = \frac{4}{x} - \frac{5x^4}{x^5+1}$

$\frac{a}{b\cdot c} = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{c}}{b}$

وتعرفنا أيضاً على قواعد التكامل ومنها القاعدة

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$ / $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

تدريب

أوجـد كلاً من التكاملات غير المحدودة الآتية :

أو نفرض $u=2+\ln x$

❶ $\int \frac{1}{x(2+\ln x)}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{2+\ln x}dx = \ln|2+\ln x| + c$

مشتقة $\frac{1}{x}$

أو نفرض $u=\sqrt{x}$

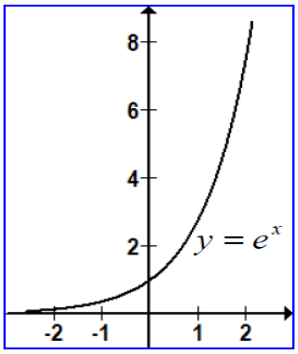
❷ $\int \frac{1}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{2+\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2+\sqrt{x}}dx = 2\ln|2+\sqrt{x}| + c$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

❸ $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int \frac{u^2}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\,du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$

نفرض $u = \ln x$
$du = \frac{1}{x}dx$
$dx = x\,du$

الدالة الأسية كدالة عكسية للوغاريتم الطبيعي



تعريف : للعدد x غير النسبي نعرف $y=e^x$ على أنه العدد الذي فيه $\ln y = \ln e^x = x$

و هذا يعني أن $\ln y = x$ إذا وفقط إذا $y=e^x$

ولكل $x>0$ يكون $e^{\ln x}=x$ ، و لكل $-\infty<x<\infty$ يكون $\ln e^x = x$

لاحظ أن مجال $y=e^x$ هو $\mathcal{R}$ و $y'=e^x>0$ و $y''=e^x>0$

و هذا يعني أن الدالة متزايدة في مجالها وتمثيلها البياني مقعر للأعلى

وكذلك $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ / $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

نظرية (2)

لأي أعداد حقيقية r, s وأي عدد نسبي t يكون

(i) $e^r \cdot e^s = e^{r+s}$ / (ii) $e^r / e^s = e^{r-s}$ / (iii) $(e^r)^t = e^{rt}$

نظرية (3)

لأي أساس $a>0\ (a\neq 1)$ وأي عدد $x>0$ فإن $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ⟸ $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$

تدريب

أوجـد المشتقة باستخدام خصائص اللوغاريتمات عند الحاجة

❶ $\frac{d}{dx}\log_7\sqrt{x^2+1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}{\ln 7}\right) = \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2\ln 7} = \frac{2x}{2\ln 7(x^2+1)}$

❷ $\frac{d}{dx}\log_{10}(2^x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln 2^x}{\ln 10}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x\ln 2}{\ln 10}\right) = \frac{\ln 2}{\ln 10}$

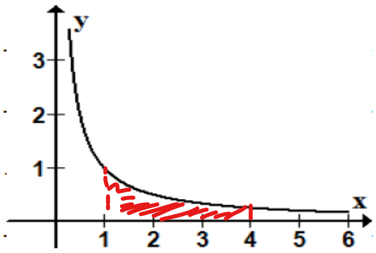
③ $\frac{d}{dx}(2^x) = \ln 2 \cdot 2^x$

④ $\frac{d}{dx}(2^{x^2}) = 2x\ln 2 \cdot 2^{x^2}$

تمـارين

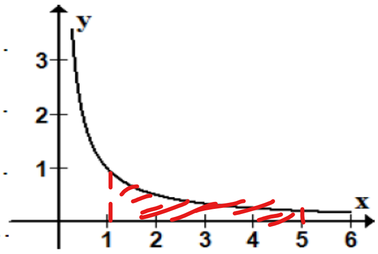
① عبّر عن العدد بصفته تكاملاً ، وارسم المساحة المناظرة ، واستخدم قاعدة سمبسون مع $n=4$ لتقدير قيمته

1) $\ln 4 = \int_1^4 \frac{1}{t}\,dt$, $\int_1^4$
$= \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$



2) $\ln 5 = \int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$

$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ قاعدة



② أوجد المشتقة باستخدام خصائص اللوغاريتمات عند الحاجة

❶ $y = \ln(e^x \sqrt[3]{x^2+1})$ $= \ln e^x + \ln \sqrt[3]{x^2+1} = x\ln e + \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$

$y' = 1 + \frac{2x}{3(x^2+1)}$

❷ $y = \ln\sqrt{\frac{x^3}{x^5+1}}$ $= \frac{1}{2}\ln\frac{x^3}{x^5+1} = \frac{1}{2}(\ln x^3 - \ln(x^5+1))$

$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{x^3} - \frac{5x^4}{x^5+1}\right) = \frac{3}{2x} - \frac{5x^4}{2(x^5+1)}$

❸ $y = 3^x$

$y' = \ln 3 \cdot 3^x$

❹ $y = 4^{\sqrt{x}}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln 4 \cdot 4^{\sqrt{x}}$

$$\int u'\, a^{u}\, dx = \frac{1}{\ln a} a^{u} + c \quad ; a > 0$$

③ أوجـد كلاً من التكاملات الآتية :

1) $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\cancel{x} u} \cdot \cancel{x}\, du = \int \frac{1}{u} du$

$= \ln u + c = \ln(\ln x) + c$

$\boxed{u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x\,du}$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x} dx = \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}\, u} \cdot \cancel{\sqrt{1-x^2}}\, du$

$= \int \frac{1}{u} du = \ln u + c = \ln \sin^{-1} x + c$

$u = \sin^{-1} x$
$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$dx = \sqrt{1-x^2}\, du$

3) $\int \frac{6}{(1+x^2)\tan^{-1} x} dx = \int \frac{6}{\cancel{(1+x^2)} u} \cdot \cancel{(1+x^2)}\, du$

زيادة للتعويض ← تعويض

$= \int \frac{6}{u} du = 6 \ln u + c$

$= \ln(\tan^{-1} x) + c$

$u = \tan^{-1} x$
$du = \frac{1}{1+x^2} dx$
$dx = (1+x^2)\, du$

4) $\int \frac{\sin(\ln x^3)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{3} du$

$= -\frac{1}{3} \cos u + c = -\frac{1}{3} \cos(\ln x^3) + c$

$u = \ln x^3$
$du = \frac{3x^2}{x^3} dx$
$du = \frac{3}{x} dx$
$dx = \frac{x}{3} du$

5) $\int 5^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int -3 \cdot 5^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\ln 5} \cdot 5^{-3x} + c$

مثال: $\int 4^{5x} dx = \frac{1}{5} \int 5 \cdot 4^{5x} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot 4^{5x} + c$

6) $\int \frac{e^{2/x}}{x^2} dx = \int \frac{e^{u}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2}}{-2} du = \int -\frac{1}{2} e^{u} du$

$= -\frac{1}{2} e^{u} + c$

$= -\frac{1}{2} e^{2/x} + c$

$u = \frac{2}{x}$
$du = \frac{-2}{x^2} dx$
$dx = \frac{x^2}{-2} du$

7) $\int x\,(3^{x^2})\, dx$

$\frac{1}{2} \int 2x \cdot 3^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^{x^2} + c$

الفصل الدراسي الثاني — الموضوع : التكامل (الوحدة الخامسة) — اسم الطالب:..

واجب

④ أوجـد قيمة كل من التكاملات المحدودة الآتية :

1) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3-4}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3-4}$ $\quad 3x^2$

$= \frac{1}{3}\ln|x^3-4|\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln|1-4| - \frac{1}{3}\ln|0-4|$

$= \frac{1}{3}\ln 3 - \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 4) = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{4}$

2) $\int_0^1 \tan x\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_0^1 \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$ $\quad -\sin x$

$= -\ln|\cos x|\Big|_0^1 = -\ln|\cos 1| - -\ln|\cos 0|$

$= -\ln\cos 1 + \ln 1$

$= -\ln|\cos 1|$

3) $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln|e^x + e^{-x}|\Big|_0^1$ $\quad e^x - e^{-x}$

$= \ln|e^1 + e^{-1}| - \ln|e^0 + e^0|$

$= \ln|e + e^{-1}| - \ln 2$

4) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^{\ln 2} \frac{u}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,du$

$= \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^2}{2} - 0$

نفرض
$u = \ln x$
$du = \frac{1}{x}\,dx$
$dx = x\,du$
$x=1 \quad u=0$
$x=2 \quad u=\ln 2$

5) $\int_1^2 \frac{1}{\cos^2 x\tan x}\,dx = \int_1^2 \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

$= \int_{\tan 1}^{\tan 2} \frac{\cancel{\sec^2 x}}{u}\cdot\frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$

$= \int_{\tan 1}^{\tan 2} \frac{1}{u}\,du = \ln u\Big|_{\tan 1}^{\tan 2} = \ln\tan 2 - \ln\tan 1$

$u = \tan x$
$du = \sec^2 x\,dx$
$dx = \frac{du}{\sec^2 x}$
$x=1 \quad u=\tan 1$
$x=2 \quad u=\tan 2$

مدرس المادة : علاء بخيت